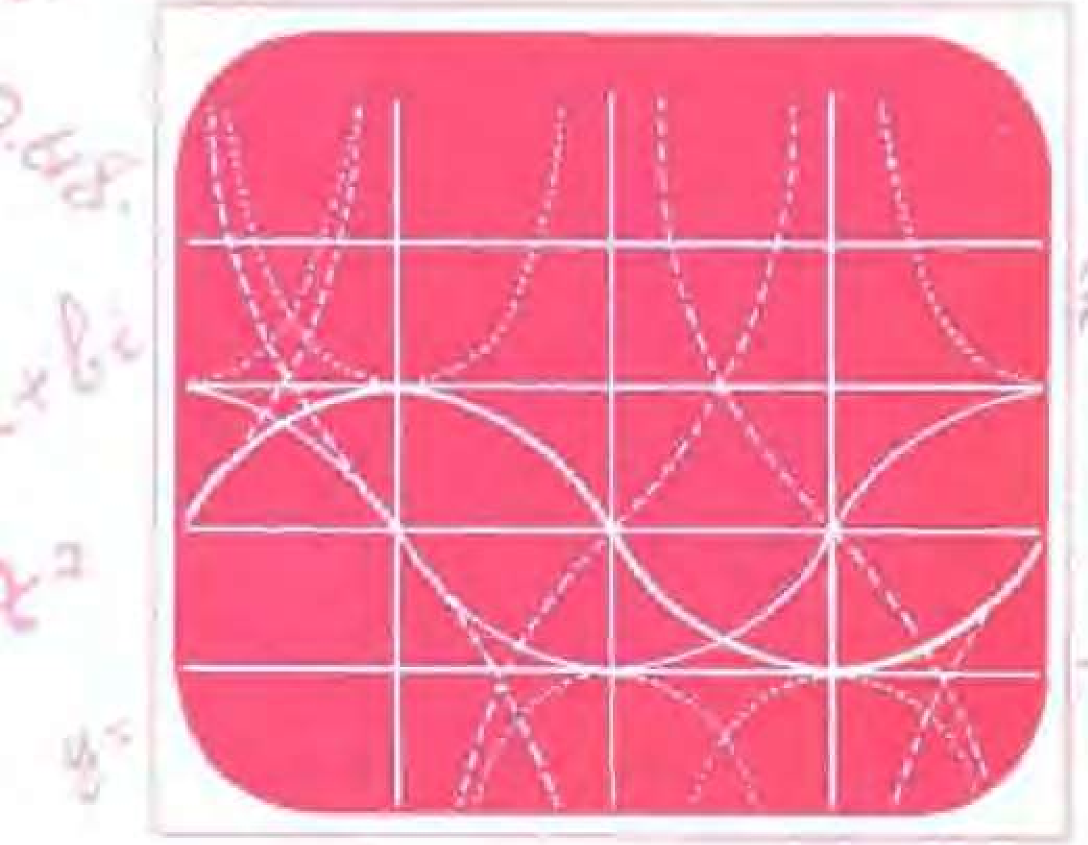


单 墫 著

集合及其子集

上海教育出版社



责任编辑　叶中豪







ISBN 7-5320-7482-X/G·7638

定　　价：7.20 元

集合及其子集

单 墫 著

上海教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

集合及其子集 / 单墫著. —上海：上海教育出版社，2001.6
ISBN 7-5320-7482-X

Ⅰ.集... Ⅱ.单... Ⅲ.集论 Ⅳ.O144

中国版本图书馆CIP数据核字（2001）第034491号

集合及其子集

单 墫 著

上海世纪出版集团
上海教育出版社 出版发行
（上海永福路123号 邮政编码：200031）
各地新华书店经销 上海市委党校印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32 印张 6.5 字数 138,000
2001年7月第1版 2001年7月第1次印刷
印数 1—5,150本
ISBN 7-5320-7482-X/G·7638 定价：7.20元

序

集论，是全部数学的基础.

数学大师 Cantor，建立了基数、序型等重要概念，将研究从有限集推进到无限集，创立了集论这一数学分支.

近三十年来，随着组合数学的蓬勃发展，关于有限集及其子集族，又有很多的研究，得出很多重要而且优美的结果.

但是，国内至今尚未见到专门介绍集论的通俗读物，希望这本小书能起抛砖引玉的作用.

感谢王文才先生与叶中豪先生，没有他们的鼓励与支持，这本小书是不可能问世的.

单 墫

目　录

序

第一章　集合 …… 1
1.1　集合 …… 1
1.2　从属关系 …… 2
1.3　包含 …… 4
1.4　并与交 …… 5
1.5　差与补 …… 7
1.6　Venn 图 …… 8
1.7　有关集合的等式(Ⅰ) …… 9
1.8　对称差 …… 12
1.9　有关集合的等式(Ⅱ) …… 15
1.10　有关集合的等式(Ⅲ) …… 19
1.11　容斥原理(Ⅰ) …… 22
1.12　容斥原理(Ⅱ) …… 26
第二章　映射 …… 29
2.1　映射 …… 29
2.2　复合映射 …… 31
2.3　有限集到自身的映射 …… 32
2.4　构造映射(Ⅰ) …… 33
2.5　构造映射(Ⅱ) …… 36
2.6　函数方程(Ⅰ) …… 39

2.7 函数方程(Ⅱ) …… 43
2.8 链 …… 48
2.9 图 …… 52
第三章 有限集的子集 …… 56
3.1 子集的个数 …… 56
3.2 两两相交的子集 …… 57
3.3 奇偶子集 …… 58
3.4 另一种奇偶子集 …… 60
3.5 Graham 的一个问题 …… 61
3.6 三元子集族(Ⅰ) …… 66
3.7 三元子集族(Ⅱ) …… 69
3.8 Steiner 三连系 …… 73
3.9 构造 …… 77
3.10 分拆(Ⅰ) …… 81
3.11 分拆(Ⅱ) …… 85
3.12 覆盖 …… 89
3.13 Stirling 数 …… 91
3.14 $M_{(n,k,h)}$ …… 97
第四章 各种子集族 …… 102
4.1 S 族 …… 102
4.2 链 …… 106
4.3 Dilworth 定理 …… 111
4.4 Littlewood-Offord 问题 …… 113
4.5 I 族 …… 117
4.6 EKR 定理的推广 …… 122
4.7 影 …… 127
4.8 Milner 定理 …… 131

4.9　上族与下族 ………………………………………… 134
4.10 四函数定理 ………………………………………… 138
4.11 H 族 ……………………………………………… 143
4.12 相距合理的族 ……………………………………… 149
第五章　无限集……………………………………………… 156
5.1　无限集 ……………………………………………… 156
5.2　可数集 ……………………………………………… 158
5.3　连续统的基数 ……………………………………… 162
5.4　基数的比较 ………………………………………… 164
5.5　直线上的开集与闭集 ……………………………… 169
5.6　Cantor 的完备集 …………………………………… 172
5.7　Kuratowski 定理 …………………………………… 175

习题……………………………………………………… 183
习题解答………………………………………………… 188

第一章　集　　合

1.1　集　　合

具有某种性质的事物，它们的全体称为一个集合. 这些事物称为这个集合的*元素*.

集合简称为*集*. 元素简称为*元*.

例如，某一学校的学生组成一个集合. 某国的官员组成一个集合. 地球上的老鼠组成一个集合等等.

正整数（自然数）组成一个集合，通常记为 $\mathbf{N}$.

整数组成一个集合，通常记为 $\mathbf{Z}$.

有理数组成一个集合，通常记为 $\mathbf{Q}$.

实数组成一个集合，通常记为 $\mathbf{R}$.

复数组成一个集合，通常记为 $\mathbf{C}$.

平面上的点组成一个集合，通常称为平面点集.

集合 A 中的元素，如果有无限多个，那么 A 称为无限集；如果 A 中的元素仅有有限多个，那么 A 称为有限集.

用 $|A|$ 表示 A 的元数（即元素的个数）. 对于无限集，$|A|=\infty$（无穷大）.

不含任何元素的集合，称为空集. 通常记为 $\varnothing$. 显然，$|A|=0$ 是 $A=\varnothing$ 的充分必要条件.

1.2 从属关系

如果事物 a 是集合 A 的元素，那么就说“a 属于 A”或“a 在A 中”，并记为

$$a \in A.$$

如果 a 不是 A 的元素，那么就说“a 不属于 A”，并记为

$$a \notin A（也有些书上写成 a \overline{\in} A）.$$

在 A 为有限集时，我们常常将 A 的元素全部列举出来，例如

$$A = \{1, 2, 3\},$$

表示 A 是三元集（三个元素的集合），它的元素是 1, 2, 3（即 $1 \in A$, $2 \in A$, $3 \in A$）. 又如

$$B = \{a, b, c, d\},$$

表示 B 是四元集，它的元素是 a, b, c, d.

在上述记号中，花括号内写出的元素应当互不相同，即每个元素恰出现一次. 至于元素出现的顺序，不必考虑. 我们认为

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 2\}, \{2, 1, 3\},$$
$$\{2, 3, 1\}, \{3, 1, 2\}, \{3, 2, 1\}$$

都是同一个集.

仅含一个元素的集称为单元素集，例如

$$A = \{5\}.$$

对于元数较多的集合或者无穷集，常常采用下面的记号. 例如

$$A = \{a \mid a 为正偶数\},$$

表示 A 是正偶数组成的集. 又如

$$B=\{(x, y) \mid x, y \text{ 均为整数}\},$$

表示 B 是平面上整点(格点)的集合.

在上述记法中,括号里写一个代表元素,在竖线后面写明它所具有的性质.

在同时讨论几个集合时,下面的从属关系表是很有用的:

表 1.2.1

元素 / 集合	a_1	a_2	a_3	…	a_{n-1}	a_n
A_1	1	0	1	…	1	0
A_2	1	1	0	…	1	1
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
A_m	1	1	1	…	1	0

表的 m 行(最上面一行除外)表示 m 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_m$;表的 n 列(最左面一列除外)表示 n 个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

若 $a_i \in A_j (1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m)$, 则在 a_i 所在列与 A_j 所在行的交叉处写上 1. 若 $a_i \notin A_j$, 则写上 0. 例如表 1.2.1 中,

$$a_1 \in A_1, a_1 \in A_2, \cdots, a_1 \in A_m,$$

$$a_2 \notin A_1, a_2 \in A_2, a_3 \notin A_2, \cdots, a_n \notin A_1.$$

还可看出

$$A_1 = \{a_1, a_3, \cdots, a_{n-1}\},$$

$$A_2 = \{a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n\},$$

……

$$A_n = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}\}.$$

当然,也可以用行表示元素,列表示集合,这没有实质性的不同.

1.3 包　　含

如果集合 A 的元素都在集合 B 中,那么 A 称为 B 的子集,并记为

$$A \subseteq B \text{ (或 } B \supseteq A\text{)},$$

读做 B 包含 A 或 A 包含于 B 中.

显然有 $A \subseteq A$, 即每个集合都是它自身的子集.

如果 $A \subseteq B$, 并且 B 中至少有一个元素不属于 A,那么称 A 为 B 的真子集,并记为

$$A \subset B \text{ (或 } B \supset A\text{)}$$

(也有些书上用 $A \subset B$ 表示 A 是 B 的子集,而用 $A \subsetneq B$ 表示 A 是 B 的真子集),读做 B 真包含 A 或 A 真包含于 B 中. 例如

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C},$$

即自然数集是整数集的真子集,整数集是有理数集的真子集,有理数集是实数集的真子集,实数集是复数集的真子集.

如果 $A \subseteq B$ 并且 $B \subseteq A$, 那么 A 的元素都是 B 的元素, B 的元素也都是 A 的元素. 因此 A, B 是同一个集合,即 $A = B$.

约定空集 $\varnothing$ 为每一个集合的子集.

并不是任意两个集合之间都有包含关系. 例如

$$A = \{1, 2\}, B = \{4, 5, 6\},$$

则 A 不是 B 的子集, B 也不是 A 的子集.

显然，当$A\subseteq B$，$B\subseteq C$时，$A\subseteq C$，即$\subseteq$关系具有传递性.

综上所述，$\subseteq$关系具有：

(i) 反身性，即$A\subseteq A$；

(ii) 传递性，即$A\subseteq B$，$B\subseteq C$推出$A\subseteq C$；

(iii) $A\subseteq B$，$B\subseteq A$推出$A=B$.

我们称这样的关系为半序关系(或偏序关系).

1.4 并 与 交

给定两个集合A，B. 称集合

$$C=\{c \mid c\text{属于}A\text{或}B\}$$

为A，B的并集(简称为并)，记为$A\cup B$. 例如，

(i) 若$A=\{1, 2, 3, 4\}$，$B=\{1, 4, 5, 6\}$，则

$$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

(ii) 若A是猫的集合，B是黑猫的集合，则$A\cup B=A$(因为黑猫是猫). 一般地，若

$$A\supseteq B,$$

则

$$A\cup B=A.$$

反之亦真.

(iii) 若A是正实数的集合，B是负实数的集合，则$A\cup B$是非零实数的集合.

显然$A\cup B\supseteq A$，$A\cup B\supseteq B$，并且

$$A\cup B=B\cup A.$$

类似地，可以定义多个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并集：

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$
$$=\{a \mid a \text{ 至少属于一个 } A_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

例如对(iii)中的 A, B，有

$$A \cup B \cup \{0\} = \mathbf{R}.$$

对于给定的两个集合 A, B、称集合

$$C = \{c \mid c \text{ 同时属于 } A, B\}$$

为 A, B 的交集（简称为交），记为 $A \cap B$. 例如，

(i) 若 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 4, 5, 6\}$，则

$$A \cap B = \{1, 4\}.$$

(ii) 若 A 是猫的集合，B 是白猫的集合，则 $A \cap B = B$. 一般地，若

$$A \supseteq B,$$

则

$$A \cap B = B.$$

反之亦真.

(iii) 若 A 是正实数的集合，B 是负实数的集合，则 $A \cap B = \varnothing$.

显然 $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$，并且

$$A \cap B = B \cap A.$$

交集符号可以省去，例如 $A \cap B$ 常写成 AB.

类似地，可以定义多个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交集：

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

$= \{a \mid a$ 属于每一个 A_i，$1 \leqslant i \leqslant n\}$.

显然 $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup A = A \cap A = A$.

1.5 差与补

给定两个集合 A，B. 称集合

$$C = \{c \mid c \in A \text{ 并且 } c \notin B\}$$

为 A 减 B，记为 $A - B$. 例如，

(i) 若 $A = \{1, 2, 3, 4\}$，$B = \{1, 4, 5, 6\}$，则

$$A - B = \{2, 3\}.$$

(ii) 若 A 是猫的集合，B 是黑猫的集合，则 $A - B$ 为不是黑色的猫的集合.

(iii) 若 A 是正实数的集合，B 是负实数的集合，则 $A - B = A$.

注意差不具有对称性，即一般说来 $A - B$ 与 $B - A$ 是不相同的. 例如上面的三个例子，在(i)中，$B - A = \{5, 6\}$. 在(ii)中，$B - A = \varnothing$. 在(iii)中，$B - A = B$.

为了方便，常常将一个集合作为全集合，它由一切事物(或我们所考虑的一切事物)组成. 例如，考虑平面上的点集时，可以将平面点集(即平面上所有点组成的点集)作为全集. 考虑实数时，可将 **R** 作为全集，而考虑复数时，应将 **C** 作为全集.

全集通常用 I 表示.

对任一集 A，称 $I - A$ 为 A 的补集，并用 A' 表示. 显然

$$A \cap A' = \varnothing, \quad A \cup A' = I.$$

A' 由不属于 A 的元素组成，因此

$$(A')' = A,$$

即补集的补集是原集. 所以 A 与 A'互为补集. 显然 $\varnothing' = I$, $I' = \varnothing$.

由定义, $A - B = A \cap B'$.

1.6 Venn 图

利用圆(这里指圆盘)来表示集合的 Venn 图,是帮助理解集合之间关系的直观工具.

例如,图 1.6.1 中,两个圆分别表示集合 A 与 B,阴影部分表示 $A \cup B$. 图 1.6.2 中的阴影部分表示 $A \cap B$. 图1.6.3,

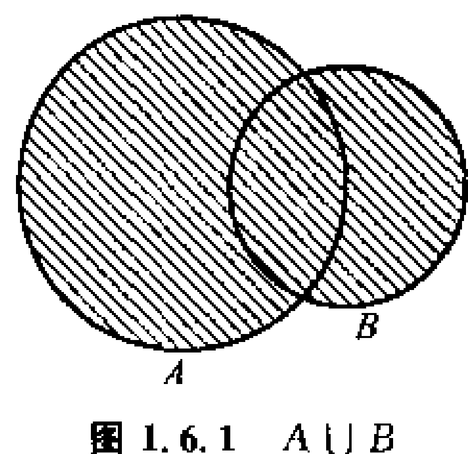


图 1.6.1 $A \cup B$

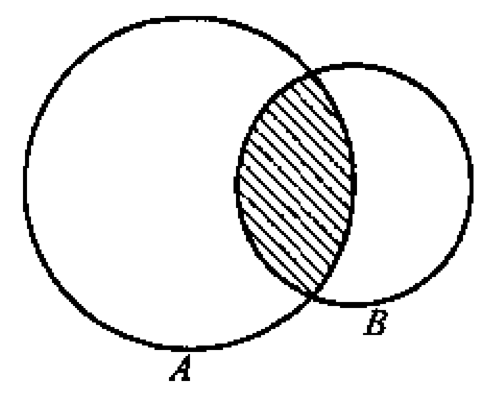


图 1.6.2 $A \cap B$

1.6.4 中的阴影部分分别表示 $A-B$ 与 $B-A$. 图1.6.5 表示

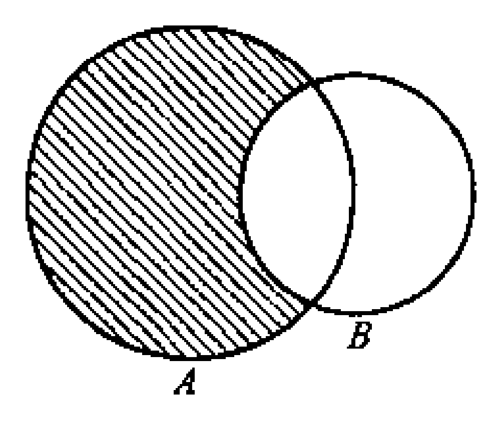


图 1.6.3 $A-B$

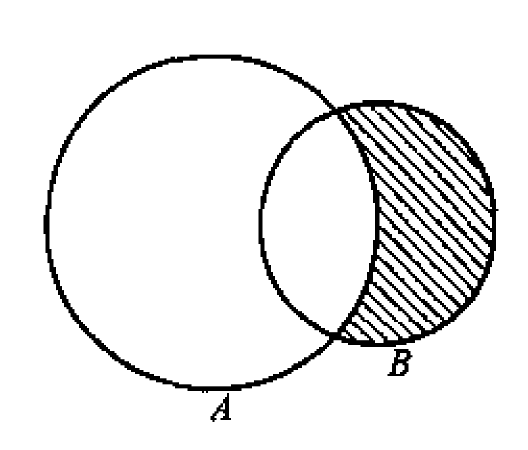


图 1.6.4 $B-A$

$A \subseteq B$. 在图 1.6.6 中,大圆表示全集 I,阴影部分是 A 的补集 A'.

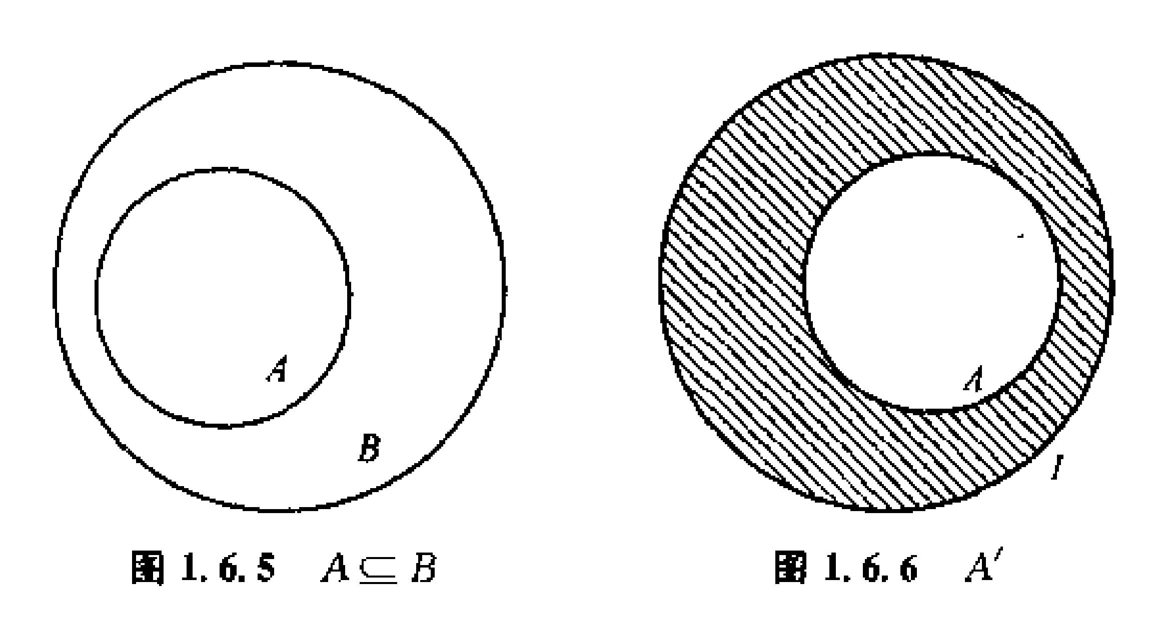


图 1.6.5 $A \subseteq B$　　　　图 1.6.6 A'

将圆改为矩形也无不可,这并不影响问题的实质(谁包含谁).

1.7 有关集合的等式(Ⅰ)

本节讨论一些有关集合的等式.

例 1(De Morgan 公式) 对任意两个集 A, B,均有

$$(A \cup B)' = A' \cap B', \tag{1}$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'. \tag{2}$$

解 首先证明(1). $A \cup B$ 是在 A 或在 B 中的元素组成的集,因此 $(A \cup B)'$ 由不在 A 也不在 B 中的元素组成. 这也就是 $A' \cap B'$.

如果考虑 Venn 图,那么 $(A \cup B)'$ 与 $A' \cap B'$ 都是图 1.7.1 中的阴影部分(为方便起见,全集 I 用一矩形表示).

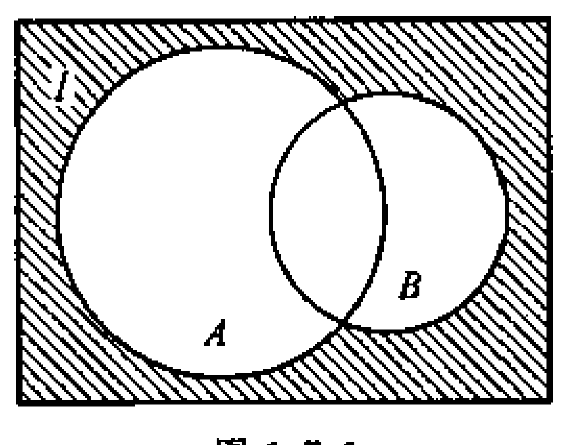


图 1.7.1

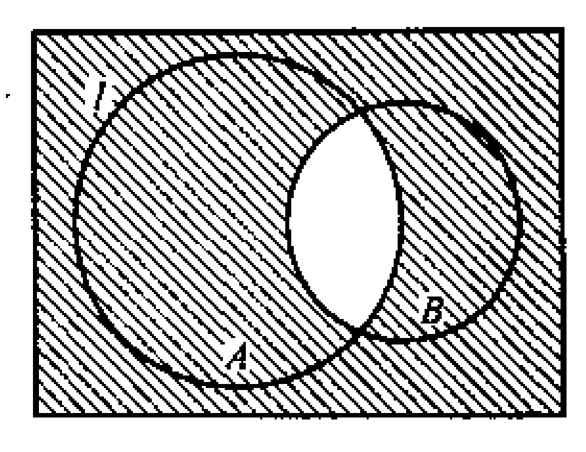


图 1.7.2

同样可证(2). 图 1.7.2 中的阴影部分表示(2)的左边，也表示(2)的右边.

例 2(并与交的结合律)　对任意集合 A, B, C 均有

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \tag{3}$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C. \tag{4}$$

解　只需注意(3)式两边均表示至少属于 A, B, C 之一的那些元素组成的集合. (4)式两边均表示同时属于 A, B, C 的那些元素组成的集合.

(3), (4)也不难用 Venn 图证明.

于是，证明有关集合的等式，已经有两种方法：

(i) 考虑等式两边(或其他有关式子)的意义；

(ii) 利用 Venn 图.

例 3(并与交的分配律)　对于任意集合 A, B, C 均有

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \tag{5}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \tag{6}$$

解　仍可用前面所说的两种方法证明，但这里介绍第三种方法，即

(iii) 考虑两边的元素，证明左边的元素必属于右边，右边的元素也必属于左边.

设 $x \in A \cup (B \cap C)$，则 $x \in A$ 或 $x \in B \cap C$. $x \in A$ 时，$x \in A \cup B$，$x \in A \cup C$，所以 $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. $x \in B \cap C$ 时，$x \in B$ 并且 $x \in C$，所以 $x \in A \cup B$，$x \in A \cup C$. 从而仍有 $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

反之，设 $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$，则 $x \in A \cup B$ 且 $x \in A \cup C$. 若 $x \in A$，则 $A \in A \cup (B \cap C)$. 若 $x \notin A$，则由 $x \in A \cup B$ 且 $x \in A \cup C$ 得 $x \in B$ 且 $x \in C$，即 $x \in B \cap C$. 从而仍有 $x \in A \cup (B \cap C)$.

于是(5)成立.

类似地可以证明(6). 但也可以由(5)得

$$A' \cup (B' \cap C') = (A' \cup B') \cap (A' \cup C') \qquad (5')$$

(将(5)中 A, B, C 用 A', B', C' 代替). 然后在两边取补. 根据 De Morgan 公式

$$(A' \cup (B' \cap C'))' = (A')' \cap (B' \cap C')'$$

$$= A \cap (B \cup C),$$

$$((A' \cup B') \cap (A' \cup C'))' = (A' \cup B')' \cup (A' \cup C')'$$

$$= (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

因此(6)式成立.

这就是证明有关集合的等式时，常用的第四个方法，即

(iv) 利用已知的有关集合的等式或公式.

从上述三个例题可以看出并与交是对偶的. 即由一个有关集合的等式，将其中并改为交，交改为并，便可产生另一个有关集合的等式. 例如(1)与(2)，(3)与(4)，(5)与(6)都是

互相对偶的等式.

以上的(1)～(6),都可以推广至更多的集合. 例如

$$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)' = A_1' \cap A_2' \cap \cdots \cap A_n', \quad (7)$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A_1 \cup (A_2 \cup \cdots \cup A_n)$$
$$= (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cup A_n, \quad (8)$$

$$A_1 \cup (A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n)$$
$$= (A_1 \cup A_2) \cap (A_1 \cup A_3) \cap \cdots \cap (A_1 \cup A_n), \quad (9)$$

等等.

本节的结论都是常用的,应当牢记.

1.8 对 称 差

设 A, B 是两个集合,称

$$(A-B) \cup (B-A)$$

为 A, B 的对称差. 并记为 $A \triangle B$. 它由恰属于 A, B 之一的那些元素组成.

采用 Venn 图, $A \triangle B$ 可用图 1.8.1 中的阴影部分表示.

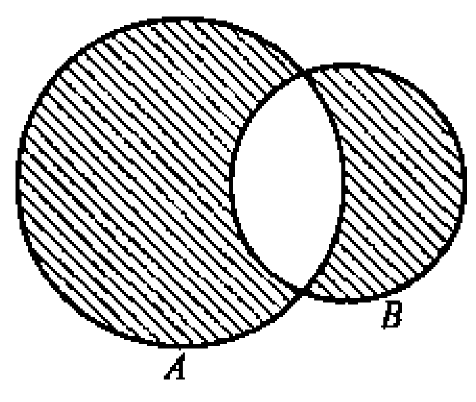


图 1.8.1　$A \triangle B$

根据定义或 Venn 图，当且仅当 $A=B$ 时，$A\triangle B=\varnothing$. 又易知 $A\triangle\varnothing=A$.

显然，对称差是可以交换的(对称性)，即

$$A\triangle B=B\triangle A. \tag{1}$$

例 1(结合律) 对任意集合 A, B, C 均有

$$(A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C). \tag{2}$$

解 用 Venn 图. 等式两边均由图 1.8.2 中阴影部分表示(即恰属于 A, B, C 之一的元素所成的集合).

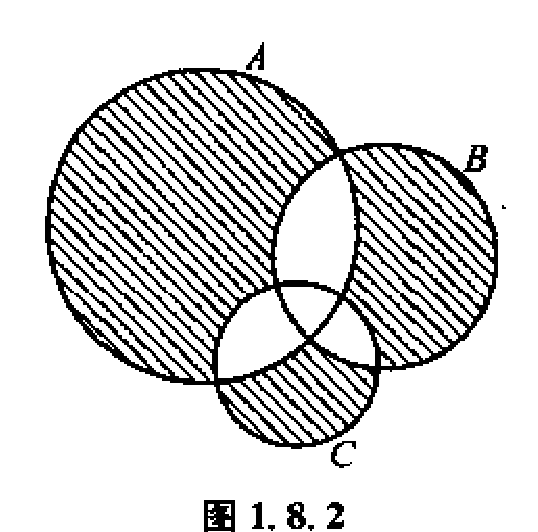


图 1.8.2

例 2 对任意集合 A, B 均有

$$A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B), \tag{3}$$

$$A\triangle B=A'\triangle B'. \tag{4}$$

解 (3)可由图 1.8.1 立即看出.

$A\triangle B$ 是由恰属于 A, B 之一的那些元素组成的集合. 同样，$A'\triangle B'$ 由恰属于 A', B' 之一的那些元素组成，即由属于 A' 而不属于 B' 的元素，或不属于 A' 而属于 B' 的元素组成. 换句话说，$A'\triangle B'$ 由不属于 A 而属于 B 的元素，或属于 A 而不

属于 B 的元素组成,亦即 $A'\triangle B'$ 由恰属于 A, B 之一的元素组成. 所以(4)成立.

例 3 A, B, C 是三个集合. 证明:

$$(A\triangle B)\triangle(B\triangle C)=A\triangle C. \tag{5}$$

解 由(2),

$$\begin{aligned}(A\triangle B)\triangle(B\triangle C) &= A\triangle(B\triangle(B\triangle C))\\ &=A\triangle((B\triangle B)\triangle C)\\ &=A\triangle(\varnothing\triangle C)\\ &=A\triangle C.\end{aligned}$$

例 4 A, B, C 是任意集合. 以下等式是否恒成立?

$$C\cap(A\triangle B)=(C\cap A)\triangle(C\cap B), \tag{6}$$

$$C\cup(A\triangle B)=(C\cup A)\triangle(C\cup B). \tag{7}$$

解 设 $x\in C\cap(A\triangle B)$, 则 $x\in C$ 且 $x\in A\triangle B$. 由 $x\in A\triangle B$ 得 x 恰属于 A, B 之一. 结合 $x\in C$ 得 x 恰属于 $C\cap A$, $C\cap B$ 之一. 因而 $x\in(C\cap A)\triangle(C\cap B)$.

反之,若 $x\in(C\cap A)\triangle(C\cap B)$, 则 x 恰属于 $C\cap A$, $C\cap B$ 之一. 因而 $x\in C$ 并且 x 恰属于 A, B 之一,即 $x\in C\cap(A\triangle B)$.

于是(6)成立. 即 $\cap$ 对 $\triangle$ 的分配律成立.

(6)也可以用 Venn 图证明(我们有意采取多种证法).

一般说来,(7)不成立. 例如对于 $C=A$,

$$A\cup(A\triangle B)=A\cup B\text{(请考虑 Venn 图)},$$

而

$$(A\cup A)\triangle(A\cup B)=A\triangle(A\cup B)=B-A.$$

当 A 不是空集时, $A\cup B\neq B-A$.

因此，$\cup$对$\triangle$的分配律不成立.

1.9 有关集合的等式(Ⅱ)

本节再讨论一些有关集合的等式. 证明所用的方法已在1.7节中说过.

所有英文大写字母均表示集合.

例1 证明：

$$A\triangle(A\cup B)=B\triangle(A\cap B)=B-(A\cap B), \quad (1)$$

$$A\cup B=A\triangle B\triangle(A\cap B). \quad (2)$$

解 (1)中$A\triangle(A\cup B)$，$B\triangle(A\cap B)$，$B-(A\cap B)$均为图1.9.1的阴影部分.

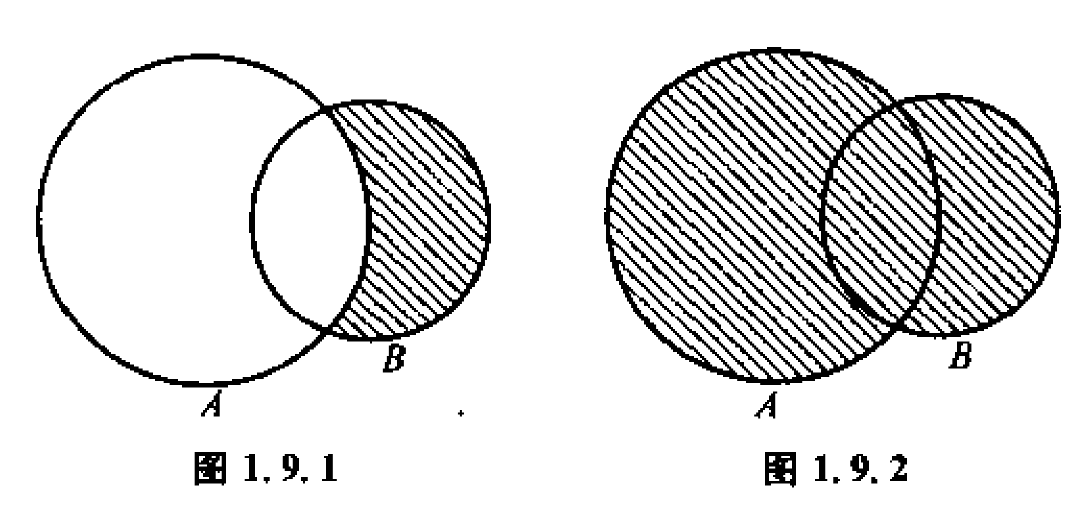


图1.9.1 **图1.9.2**

(2)的两边均为图1.9.2的阴影部分.

特别地，当$A\cap B=\varnothing$时，由(2)得

$$A\cup B=A\triangle B. \quad (3)$$

例2 证明以下关系：

$$(A-K)\cup(B-K)=(A\cup B)-K, \quad (4)$$

$$A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C), \quad (5)$$

$$A-(A-B)=A\cap B, \tag{6}$$

$$(A-B)-C=(A-C)-(B-C), \tag{7}$$

$$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C), \tag{8}$$

$$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C), \tag{9}$$

$$A-B=(A\cup B)-B=A-(A\cap B). \tag{10}$$

解 利用补集,可将差 $A-B$ 写成 $A\cap B'$. 在证明中采用这种形式往往更为方便.

$$(A-K)\cup(B-K)=(A\cap K')\cup(B\cap K')$$

$$=(A\cup B)\cap K'=(A\cup B)-K,$$

即(4)成立.

$$A-(B-C)=A\cap(B\cap C')'=A\cap(B'\cup C)$$

$$=(A\cap B')\cup(A\cap C)=(A-B)\cup(A\cap C),$$

即(5)成立.

$$(A-C)-(B-C)=(A\cap C')\cap(B\cap C')'$$

$$=A\cap C'\cap(B'\cup C)=A\cap((C'\cap B')\cup(C'\cap C))$$

$$=A\cap(C'\cap B')=(A\cap C')\cap B'=(A-C)-B,$$

即(7)成立.

$$A-(B\cap C)=A\cap(B\cap C)'=A\cap(B'\cup C')$$

$$=(A\cap B')\cup(A\cap C')=(A-B)\cup(A-C),$$

即(8)成立.

(9)的证法与(8)类似. 它与(8)对偶.

(6),(10)可用上面的证法,也可用 Venn 图. 参看图 1.9.3, 1.9.4.

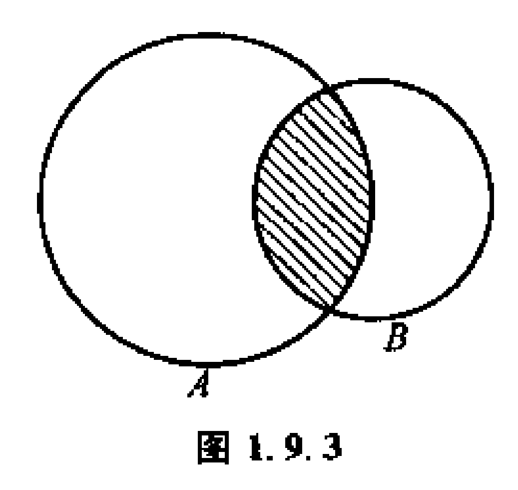


图 1.9.3

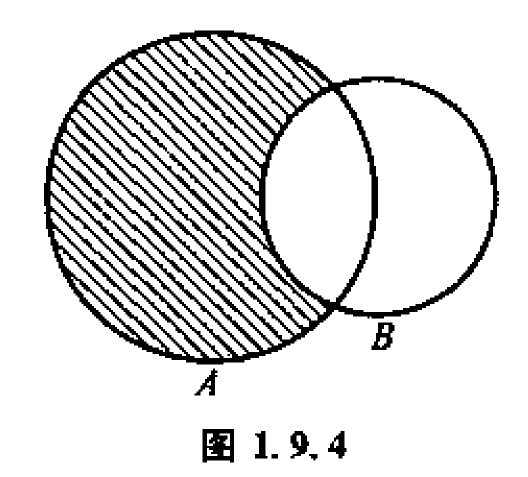


图 1.9.4

例 3 证明：

$$A-D\subseteq(A-B)\cup(B-C)\cup(C-D),\tag{11}$$

$$A\triangle C\subseteq(A\triangle B)\cup(B\triangle C),\tag{12}$$

$$(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)$$
$$=(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A),\tag{13}$$

$$(A-B)\triangle B=A\cup B.\tag{14}$$

解 设 $x\in A-D$，则 $x\in A$，$x\notin D$. 若 $x\notin B$，则 $x\in A-B$. 若 $x\in B$，$x\notin C$，则 $x\in B-C$. 若 $x\in C$，则 $x\in C-D$. 总之，$x\in(A-B)\cup(B-C)\cup(C-D)$. 因此(11)成立.

若 $x\in A\triangle C$，则 x 恰属于 A，C 之一. 不妨设 $x\in A$，$x\notin C$. 若 $x\notin B$，则 $x\in A\triangle B$. 若 $x\in B$，则 $x\in B\triangle C$. 总有 $x\in(A\triangle B)\cup(B\triangle C)$. 因此(12)成立.

若 x 至少属于 A，B，C 中的两个集，则 x 既属于(13)左边，也属于(13)右边. 若 x 至多属于 A，B，C 中的一个集，例如 $x\notin A$，B，则 $x\notin A\cap B$，$B\cap C$，$C\cap A$，因此 $x\notin$ (13) 的右边；又 $x\notin A\cup B$，因此 $x\notin$ (13) 的左边. 所以(13)成立.

显然 $A-B$ 与 B 的交为空集，利用(3)得

$$(A-B)\triangle B=(A-B)\cup B=A\cup B.$$

即(14)成立.

证明有关集合的等式(或关系式)需灵活运用各种方法，切忌执一.

例 4 证明下列各对等价关系：

$$A\cup B=\varnothing\Leftrightarrow A=\varnothing \text{ 且 } B=\varnothing, \tag{15}$$

$$A\cup B=A-B\Leftrightarrow B=\varnothing, \tag{16}$$

$$A-B=A\cap B\Leftrightarrow A=\varnothing, \tag{17}$$

$$A\cup B\subseteq C\Leftrightarrow A\subseteq C \text{ 且 } B\subseteq C, \tag{18}$$

$$C\subseteq A\cap B\Leftrightarrow C\subseteq A \text{ 且 } C\subseteq B, \tag{19}$$

$$A-B=B-A\Leftrightarrow A=B, \tag{20}$$

$$A\cap B=A\cup B\Leftrightarrow A=B, \tag{21}$$

$$A\subseteq B \text{ 且 } C\subseteq D\Leftrightarrow (A-B)\cup(C-D)=\varnothing, \tag{22}$$

$$A-B=A\Leftrightarrow B-A=B, \tag{23}$$

$$A\subseteq B\cup C\Leftrightarrow A-B\subseteq C, \tag{24}$$

$$A\subseteq B\subseteq C\Leftrightarrow A\cup B=B\cap C, \tag{25}$$

$$A=B\Leftrightarrow (A-B)\cup(B-A)=\varnothing, \tag{26}$$

$$A-K=B-K\Leftrightarrow (A\triangle B)\subseteq K. \tag{27}$$

解 (15)～(22)都是显然的. 稍想一想(可结合 Venn 图)就可知道各对关系等价. 应当养成这种直观的洞察力，一目了然. 如果极简单的问题不能迅速解决，那么复杂的问题就难于措手. 这就是学习数学应具备的基本功.

(23)的两个关系都等价于 $A\cap B=\varnothing$.

对于(24)，如果 $A \subseteq B \cup C$，那么 A 不被 B“覆盖”的部分一定被 C 覆盖，即 $A-B \subseteq C$. 反之亦然.

对于(25)，如果 $A \subseteq B \subseteq C$，那么 $B \cap C$ 与 $A \cup B$ 都等于 B. 反之，如果 $A \cup B = B \cap C$，那么 $B \subseteq A \cup B = B \cap C \subseteq B$，从而 $A \cup B$，$B \cap C$ 都等于 B，并由此得出 $A \subseteq B$，$B \subseteq C$.

(26)的 $(A-B) \cup (B-A)$ 即对称差 $A \triangle B$. 对称差为 $\varnothing$ 即没有元素恰属于 A，B 之一. 换句话说，属于 A 的元素必属于 B，属于 B 的元素也必属于 A. 因此(26)成立.

在 $A \triangle B \subseteq K$ 时，恰属于 A，B 之一的元素都属于 K，因此 $A-K$，$B-K$ 都等于 $(A \cap B)-K$；反之，若 $A-K = B-K$，则恰属于 A，B 之一的元素都在 K 中，即 $A \triangle B \subseteq K$. 所以(27)成立.

1.10 有关集合的等式(Ⅲ)

本节所介绍的等式均与对称差有关.

例 1 若 $A \triangle K = B \triangle K$，证明：$A = B$.

解 由 1.8 节例 1(结合律)，

$$A = A \triangle \varnothing = A \triangle (K \triangle K) = (A \triangle K) \triangle K$$
$$= (B \triangle K) \triangle K = B \triangle (K \triangle K) = B \triangle \varnothing = B.$$

例 2 证明：

$$(A \triangle B)' = A' \triangle B = A \triangle B', \tag{1}$$

$$(A \triangle K) \cup (B \triangle K) = (A \cap B) \triangle (K \cup (A \triangle B)). \tag{2}$$

解 $A \triangle B = (A-B) \cup (B-A) = (AB') \cup (BA')$，所以由 De Morgan 公式，

$$(A\triangle B)' = (AB')' \cap (BA')' = (A' \cup B) \cap (B' \cup A)$$
$$=(A' \cup B)B' \cup (A' \cup B)A = (A'B' \cup BB') \cup (A'A \cup BA)$$
$$=A'B' \cup BA. \qquad (3)$$

而

$$A'\triangle B = (A' - B) \cup (B - A') = A'B' \cup BA.$$

同样

$$A\triangle B' = A'B' \cup BA.$$

于是(1)成立.

为了证明(2),取补集.

$$((A\triangle K) \cup (B\triangle K))' = (A\triangle K)' \cap (B\triangle K)'$$
$$=(A\triangle K') \cap (B\triangle K') \qquad (利用(1))$$
$$=(A \cap (B\triangle K'))\triangle(K' \cap (B\triangle K')) \qquad (1.8\ (6))$$
$$=AB\triangle AK'\triangle K'B\triangle K'$$
$$=AB\triangle K'(A\triangle B\triangle I)$$
$$=AB\triangle K'(A\triangle B)', \qquad ((A\triangle B)\triangle I = (A\triangle B)')$$
$$(AB\triangle(K \cup (A\triangle B)))' = AB\triangle(K \cup (A\triangle B))' \qquad (利用(1))$$
$$=AB\triangle(K'(A\triangle B)'),$$

于是(2)成立.

为了方便,交 $A \cap B$ 简写作 AB. 并约定交(在没有括号时)比其他运算先进行,类似于数的四则运算中的乘法.

定义 $(A\triangle B)'$ 为 $A \times B$. 显然

$$A \times B = B \times A. \qquad (4)$$

又由(1)及(3),

$$A\times B=A'\triangle B=A\triangle B'=A'B'\cup BA, \tag{5}$$

从而

$$A\times B=A'\times B'. \tag{6}$$

又

$$(A\times B)\times C=(A\times B)'\triangle C=(A\triangle B)\triangle C,$$

$$A\times(B\times C)=A\triangle(B\times C)'=A\triangle(B\triangle C),$$

所以

$$(A\times B)\times C=A\times(B\times C). \tag{7}$$

例 3 证明：

$$(A\triangle B)\times C=(A\times C)\triangle B=A\triangle(B\times C), \tag{8}$$

$$(A\times C)\triangle(B\times C)=A\triangle B. \tag{9}$$

解 $(A\triangle B)\times C=(A\triangle B)\triangle C'$ (由(5))

$=(A\triangle C')\triangle B=(A\times C)\triangle B$

$=(A\triangle C')\triangle B=A\triangle(C'\triangle B)=A\triangle(B\times C),$

$(A\times C)\triangle(B\times C)=(A\triangle C')\triangle(B\triangle C')$

$=A\triangle B.$ (1.8 例 3)

例 4 证明方程组：

$$\begin{cases} X\cap(A\cup B)=X, & (10)\\ A\cap(B\cup X)=A, & (11)\\ B\cap(A\cup X)=B, & (12)\\ X\cap A\cap B=\varnothing & (13)\end{cases}$$

有唯一解，并求出这唯一的 X.

解 由(10)得 $X\subseteq A\cup B$. 由(13)，$X\cap(A\cap B)=\varnothing$.

从而 $X \subseteq A \triangle B$.

由(11)，$X \supseteq A-B$. 由(12)，$X \supseteq B-A$. 从而 $X \supseteq A \triangle B$.

于是，$X = A \triangle B$. 它显然满足(10)～(13).

1.11 容斥原理(Ⅰ)

并集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的元数满足

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \leqslant |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| \quad (1)$$

当且仅当 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中两两的交均为空集时等号成立. 又有

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \geqslant \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| \quad (2)$$

当且仅当 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中每三个的交均为空集时等号成立.

一般地，

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|. \quad (3)$$

事实上，设元素 x 恰在 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的 m 个中，则 x 对(3)式右边的贡献为

$$C_m^1 - C_m^2 + \cdots + (-1)^{m-1} C_m^m = 1 - (1-1)^m = 1.$$

由于 C_m^k 在 $k \leqslant \frac{m}{2}$ 时递增，在 $k \geqslant \frac{m}{2}$ 时递减，如果(3)的右边

略去一个正项及它以后的各项，那么(3)的左边大于右边(某些元素 x 对右边的贡献非正或被略去的贡献非负). 如果(3)的右边略去一个负项及它以后的各项，那么(3)的左边小于右边.

(3) 称为容斥原理.

例 1 某班学生中数、理、化优秀的分别有 30 人、28 人、25 人. 数理、理化、数化两科优秀的分别有 20 人、16 人、17 人. 数理化三科全优的有 10 人. 问数理两科至少有一科优秀的有多少人? 数理化三科至少有一科优秀的有多少人?

解 用 A_1，A_2，A_3 分别表示数、理、化优秀的学生组成的集合. 由题意

$$|A_1|=30,\ |A_2|=28,\ |A_3|=25,$$

$$|A_1\cap A_2|=20,\ |A_2\cap A_3|=16,\ |A_3\cap A_1|=17,$$

$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=10.$$

由容斥原理，

$$|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|=30+28-20=38,$$

即数理两科至少有一科优秀的学生为 38 人.

同样，由容斥原理，

$$\begin{aligned}|A_1\cup A_2\cup A_3|&=|A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1\cap A_2|\\&\quad-|A_2\cap A_3|-|A_3\cap A_1|+|A_1\cap A_2\cap A_3|\\&=30+28+25-20-16-17+10\\&=40,\end{aligned}$$

即数理化三科至少有一科优秀的学生为 40 人.

例 2 $n\geqslant 3$. 用数字 1，2，3 组成 n 位数(每个数字可以重复)，其中 1，2，3 均至少出现一次. 求这种 n 位数的个数.

解 用数字 1，2，3 组成的 n 位数的集合记为 I（全集），其中不含数字 i 的 n 位数的集合记为 A_i $(i=1, 2, 3)$，则

$$|I|=3^n,\ |A_1|=|A_2|=|A_3|=2^n,$$

$|A_i \cap A_j|=1\ (1 \leqslant i<j \leqslant 3)$，$|A_1 \cap A_2 \cap A_3|=0.$

由容斥原理，

$$|(A_1 \cup A_2 \cup A_3)'|=|I|-|A_1 \cup A_2 \cup A_3|$$

$$=3^n-(2^n+2^n+2^n-1-1-1+0)$$

$$=3^n-3 \times 2^n+3.$$

例 3 9 名乘客进入 4 个车厢，每个车厢都不空，有多少种分配方法？

解 用 A_i 表示第 i 个车厢空着的分配方法的集合 $(1 \leqslant i \leqslant 4)$，$I$ 表示所有分配方法的集合，则

$$|I|=4^9,\ |A_i|=3^9(1 \leqslant i \leqslant 4),$$

$$|A_i \cap A_j|=2^9(1 \leqslant i<j \leqslant 4),$$

$$|A_i \cap A_j \cap A_k|=1\ (1 \leqslant i<j<k \leqslant 4),$$

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4|=0.$$

由容斥原理，

$$|(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4)'|$$

$$=4^9-C_4^1 \times 3^9+C_4^2 \times 2^9-C_4^3 \times 1+C_4^4 \times 0$$

$$=186\ 480,$$

即每个车厢都不空的分配方法有 186 480 种.

例 2、例 3 所用的容斥原理也可以这样表述：

设全集 I 中，不具有性质 P_i 的元素组成集合 $A_i(i=1, 2, \cdots, n)$，则具有性质 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的元素共有

$$|I|-\sum|A_i|+\sum|A_i\cap A_j|-\sum|A_i\cap A_j\cap A_k|$$
$$+\cdots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n| \tag{4}$$

个. 特别地，在和式中各项相等时，上述个数为

$$|I|-C_n^1|A_1|+C_n^2|A_1\cap A_2|-C_n^3|A_1\cap A_2\cap A_3|$$
$$+\cdots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|. \tag{5}$$

(4)或(5)也称为逐步淘汰原则.

例 4 从自然数数列

$$1,2,3,4,5,\cdots \tag{6}$$

中依次划去 3 的倍数、4 的倍数，但其中凡是 5 的倍数均保留不划去. 剩下的数中第 1 995 个是多少?

解 3, 4, 5 的最小公倍数是 60. 在 1, 2, …, 60 中，3 的倍数有 $20\left(=\frac{60}{3}\right)$ 个，4 的倍数有 $15\left(=\frac{60}{4}\right)$ 个，3 与 4 的公倍数有 $5\left(=\frac{60}{3\times4}\right)$ 个. 3 与 5 的公倍数有 $4\left(=\frac{60}{3\times5}\right)$ 个，4 与 5 的公倍数有 $3\left(=\frac{60}{4\times5}\right)$ 个，3, 4, 5 的公倍数 1 个. 因此 1, 2, …, 60 中留下

$$60-20-15+5+4+3-1=36$$

个数. 同样道理，在

$$60m+1,\ 60m+2,\ \cdots,\ 60m+60\quad(m\in\mathbf{N})$$

中也留下 36 个数. 因为

$$1\,995=55\times36+15,$$

而 1, 2, …, 60 中留下的第 15 个数是 25，所以(6)中留下的第 1 995 个数是

$$55 \times 60 + 25 = 3\,325.$$

1.12 容斥原理(Ⅱ)

本节再介绍一些利用容斥原理的问题.

例 1 一次会议有 500 名代表参加,每名代表认识的人数 > 400. 证明一定能找到 6 名代表,每两名互相认识(本题中认识是互相的,即甲认识乙,则乙认识甲).

解 设代表 v_i 认识的人所成的集合为 A_i. 不妨设 $v_2 \in A_1$. 因为

$$|A_1 \cap A_2| = |A_1| + |A_2| - |A_1 \cup A_2|$$
$$> 400 + 400 - 500 > 0,$$

所以 $A_1 \cap A_2$ 不是空集. 不妨设 $v_3 \in A_1 \cap A_2$.

因为

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = |A_1 \cap A_2| + |A_3| - |(A_1 \cap A_2) \cup A_3|$$
$$> (400 \times 2 - 500) + 400 - 500$$
$$= 400 \times 3 - 500 \times 2 > 0,$$

所以 $A_1 \cap A_2 \cap A_3$ 不是空集,不妨设 $v_4 \in A_1 \cap A_2 \cap A_3$.

同样,

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4| = |A_1 \cap A_2 \cap A_3|$$
$$+ |A_4| - |(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \cup A_4|$$
$$> 400 \times 4 - 500 \times 3 > 0.$$

设 $v_5 \in A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4$. 再由

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5| > 400 \times 5 - 500 \times 4 = 0,$$

可设 $v_6 \in A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$. 这样得到的 6 个人 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 互相认识.

例 2 设 n 是正整数. 我们说集 $\{1, 2, \cdots, 2n\}$ 的一个排列 $(x_1, x_2, \cdots, x_{2n})$ 具有性质 P, 如果在 $\{1, 2, \cdots, 2n-1\}$ 中至少有一个 i, 使 $|x_i - x_{i+1}| = n$ 成立. 证明具有性质 P 的排列比不具有性质 P 的排列多.

解 对于 $k = 1, 2, \cdots, n$, 令 A_k 为 k 与 $k+n$ 相邻的排列组成的集合, 则

$$|A_k| = 2 \times (2n-1)!$$

(k 与 $k+n$ 排在一起作为一个"数", $2n-1$ 个数有 $(2n-1)!$ 种排列. k 与 $k+n$ 的位置可以交换, 因此这样的排列共 $2 \times (2n-1)!$ 种),

$$|A_k \cap A_h| = 2^2 \times (2n-2)! \quad (1 \leqslant k < h \leqslant n)$$

(将 k 与 $k+n$, h 与 $h+n$ 并在一起, $2n-2$ 个"数"有 $(2n-2)!$ 种排列, k 与 $k+n$, h 与 $h+n$ 可以交换, 各有 2 种可能).

由容斥原理, 具有性质 P 的排列个数 m

$$\begin{aligned}
&\geqslant \sum_{k=1}^{n} |A_k| - \sum_{1 \leqslant k < h \leqslant n} |A_k \cap A_h| \\
&= 2 \times (2n-1)! \times n - C_n^2 \times 2^2 \times (2n-2)! \\
&= 2n \times (2n-2)! \times n \\
&> (2n)! \times \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

m 超过排列总数 $(2n)!$ 的一半, 即具有性质 P 的排列多于不具有性质 P 的排列.

例 3 在正 $6n+1$ 边形中, k 个顶点染红色, 其余顶点染

蓝色. 证明具有同色顶点的等腰三角形的个数与染色方法无关.

解 设 k 个点染红色,其余点染蓝色时,顶点同为蓝色的等腰三角形个数为 a_k,顶点同为红色的等腰三角形个数为 b_k.

因为 $3 \nmid 6n+1$,任三个顶点不构成正三角形. 以任一顶点作为等腰三角形的"尖"——两腰的公共点,有 $6n+1$ 种方法. 其余的 $6n$ 个顶点两两成对,每一对关于过"尖"与(正 $6n+1$ 边形)中心的直线对称,它们与"尖"组成等腰三角形. 因此,共能构成 $(6n+1)\times 3n$ 个(以 $6n+1$ 边形的顶点为顶点的)等腰三角形,即 $a_0=(6n+1)\times 3n$.

a_0-a_1 即恰有一个红点 A 时,顶点不同为蓝色的等腰三角形的个数. 其中以 A 为尖的有 $3n$ 个,以其他点为尖(以 A 为一个顶点)的有 $6n$ 个. 因此 $a_0-a_1=9n$.

现在设 k 个点染成红色. 这时全部等腰三角形的个数即 a_0,以红点 A 为顶点的等腰三角形的个数是 a_0-a_1. 以两个红点 A, B 为顶点的等腰三角形有 3 个. 因此,由容斥原理,

$$a_k=a_0-C_k^1(a_0-a_1)+C_k^2\cdot 3-b_k,$$

即顶点同色的等腰三角形的个数为

$$\begin{aligned}a_k+b_k&=a_0-C_k^1(a_0-a_1)+3C_k^2\\&=3n(6n+1)-9kn+\frac{3}{2}k(k-1).\end{aligned}$$

另一种解法见习题 4.

上节的例题只需套用容斥原理,依样葫芦. 本节的例题,需要根据情况,灵活运用原理,值得细细体会.

第二章　映　　射

2.1　映　　射

设 X，Y 为两个集合，如果对于每一个元 $x \in X$，有一个元 $y \in Y$ 与它对应，那么就说定义了一个从 X 到 Y 的映射（也称为函数），记作 $f: X \to Y$. 元 y 称为元 x 在映射 f 下的像，记作 $x \longmapsto y$ 或 $y = f(x)$. X 称为 f 的定义域.

用 $f(X)$ 表示集合 $\{f(x) \mid x \in X\}$，称为像集合. 显然 $f(X) \subseteq Y$.

如果 $f(X) = Y$，那么对于每一个 $y \in Y$，至少有一个 $x \in X$，使得 $f(x) = y$. 这时称 f 为满射或 f 是从 X 到 Y 上的映射. 对于满射，显然有 $|X| \geqslant |Y|$.

如果对 X 中任意两个不同的元 x_1，x_2，均有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，那么 f 称为单射. 对于单射，显然有 $|X| \leqslant |Y|$.

一个映射既是单射又是满射，就称为一一对应. 这时 $|X| = |Y|$. 并且，对每个 $y \in Y$，有唯一的 $x \in X$ 满足 $f(x) = y$. 令 $y \longmapsto x$，就得到一个从 Y 到 X 的映射，称为 f 的逆映射（即函数 f 的反函数），记作 f^{-1}. f^{-1} 也是一一对应，而且 $f^{-1}(f(x)) = x$，$f(f^{-1}(y)) = y$.

例 1　$X = \{1, 2, 3, 4\}$，$Y = \{0, 1\}$，映射 $f: X \to Y$ 为 $1, 3 \longmapsto 1$；$2, 4 \longmapsto 0$. 这是满射，不是单射.

例 2　$X=\mathbf{R}$, $Y=\mathbf{R}$. $x\longmapsto\sin x$ $(x\in\mathbf{R})$ 所表示的映射 f(即 sin)不是满射也不是单射.

例 3　$X=\mathbf{R}$, $Y=\{y\mid -1\leqslant y\leqslant 1\}$. $x\longmapsto\sin x$ $(x\in\mathbf{R})$ 所表示的映射是满射,不是单射.

例 4　$X=\left\{x\middle| -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$, $Y=\{y\mid -1\leqslant y\leqslant 1\}$. 由 $x\longmapsto\sin x$ 所表示的映射是一一对应. 它的逆映射(反函数)是 $y\longmapsto\arcsin y$.

当 $X=Y$ 时,映射 $f: X\to X$ 是 X 到自身的映射.

若 $f:X\to X$ 使得对每个 $x\in X$,均有 $f(x)=x$,则称 f 为恒等映射,记为 I_X. 在不致混淆时,也写成 I.

若 f 不是恒等映射,则不是每个 $x\in X$ 均满足 $f(x)=x$. 称满足 $f(x)=x$ 的 x 为映射 f 的不动点.

例 5　设 X 是 n 元集,Y 是 m 元集. 求:

(i) 从 X 到 Y 的映射的个数;

(ii) 从 X 到 Y 的满射的个数.

解　(i) 每个 $x\in X$ 的像可为 m 个 $y\in Y$ 中的任意一个,因此从 X 到 Y 的映射共有

$$\overbrace{m\times m\times\cdots\times m}^{n\text{个}}=m^n$$

个.

(ii) 上述 m^n 个映射中,y_i 不是像的有 $(m-1)^n$ 个,y_i,y_j 不是像的有 $(m-2)^n$ 个,……　根据容斥原理,满射的个数为

$$m^n-C_m^1(m-1)^n+C_m^2(m-2)^n+\cdots+(-1)^kC_m^k(m-k)^n+\cdots+(-1)^{m-1}C_m^{m-1}.$$

2.2 复合映射

设 X, Y, V 为集合，$f: X \to Y$, $g: Y \to V$ 为映射，则产生一个映射 $x \longmapsto g(f(x))$，称为 f, g 的复合映射，用 $g \circ f: X \to V$ 表示.

对于 $X \to Y$ 的一一对应 f，显然有

$$f^{-1} \circ f = I_X, \quad f \circ f^{-1} = I_Y. \tag{1}$$

例 1 设 $f: X \to Y$, $g: Y \to V$. 证明：

(i) 若 $g \circ f$ 是单射，则 f 是单射；

(ii) 若 $g \circ f$ 是满射，则 g 是满射.

解 (i) 若有 $f(x_i) = f(x_j)$，则

$$g(f(x_i)) = g(f(x_j)).$$

已知 $g \circ f$ 是单射，故由上式得 $x_i = x_j$，即 f 为单射.

(ii) 因为 $g \circ f$ 是满射，所以对任一 $v \in V$，有 $x \in X$ 使 $g(f(x)) = v$. 于是有 $y = f(x) \in Y$，使 $g(y) = v$. 从而 g 为满射.

例 2 设 $f: X \to X$ 满足

$$\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k\text{个}f} = I_X, \tag{2}$$

证明 f 是一一对应.

解 I_X 是满射，所以由例 1(ii)(那里的 g, f 分别为现在的 f, $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k-1\text{个}f}$)，$f$ 为满射.

又 I_X 是单射，所以由例 1(i)(那里的 g, f 分别为现在的 $\underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{k-1\text{个}f}$, f)，f 为单射.

于是 f 是一一对应.

$\underbrace{f\circ f\circ f\circ\cdots\circ f}_{k\text{个}f}$常简记为 $f^{(k)}$.

例 3 映射 $f:X\to X$. 若对所有 $x\in X$, $f(f(x))=f(x)$ 成立,则称为幂等的. 设 $|X|=n$, 试求出幂等映射的个数.

解 设 $|f(X)|=k$,则 $f(X)$ 有 C_n^k 种选择. 对于 $f(X)$ 中任一元 x,显然有 $f(x)=x$. 而 $X-f(X)$ 中的每个元,它的像有 k 种选择. 所以共有幂等映射 $\sum\limits_{k=1}^{n}C_n^k k^{n-k}$ 个.

例 4 若 $f:X\to X$ 满足 $f(f(x))=x$ (所有 $x\in X$),则 f 称为对合. 设 $|X|=n$,求 $X\to X$ 的对合的个数.

解 设 n 个元中有 j 个对 x, y,满足 $f(x)=y$, $f(y)=x$;其余的满足 $f(x)=x$.

$j=0$ 时,仅一种映射,即 $f=I$;

$j>0$ 时, 每次取两个作为一对, 共取 j 对, 有 $C_n^2C_{n-2}^2\cdots C_{n-2j+2}^2$ 种取法. 不考虑 j 对的顺序, 有 $\frac{1}{j!}C_n^2C_{n-2}^2\cdots C_{n-2j+2}^2=C_n^{2j}\cdot(2j-1)!!$种.

因此 f 的个数为 $1+\sum\limits_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_n^{2j}(2j-1)!!$.

2.3 有限集到自身的映射

设 X 为有限集,映射 $f:X\to X$. 这时单射、满射、一一对应三个概念是相同的. 即有

例 1 (i) 若 f 为单射,则 f 为一一对应;

(ii) 若 f 为满射,则 f 为一一对应.

解 (i) 设 X 中元素为 x_1, x_2, …, x_n. 由于 f 为单射, $f(x_1)$, $f(x_2)$, …, $f(x_n)$ 各不相同. 因此, $f(x_1)$, $f(x_2)$, …, $f(x_n)$ 就是 X 的全部元素, $f(X)=X$, f 为满射.

(ii) 设 X 中元素为 x_1, x_2, …, x_n. 由于 f 为满射, $f(X)=X$, 所以 $f(x_1)$, $f(x_2)$, …, $f(x_n)$ 这 n 个元各不相同, 它们就是 X 的全部元素. f 是单射.

f 既是单射又是满射, 因而是一一对应.

若 $f: X\to Y$, 其中 X, Y 为有限集, 并且 $|X|=|Y|$, 则 (i), (ii) 同样成立.

例 1 是很有用的.

例 2 设自然数 a 与 m 互质, $m>1$, 则对任意整数 b, 同余方程

$$ax\equiv b \pmod m \tag{1}$$

有解. 即有一个整数 x, 使 $ax-b$ 被 m 整除.

解 考虑 $\bmod m$ 的剩余类 $X=\{0, 1, 2, \cdots, m-1\}$ 到自身的映射 f, 定义为

$$x\longmapsto ax \text{(所在的剩余类)}.$$

f 是单射: 因为 a 与 m 互质, 所以, 当 $ax\equiv ax' \pmod m$ 即 $a(x-x')$ 被 m 整除时, $x-x'$ 被 m 整除, 即 $x\equiv x' \pmod m$.

根据例 1, f 是满射. 从而对任意的整数 b, 方程(1)有解.

2.4 构造映射(Ⅰ)

许多问题需要构造一个合乎要求的映射.

例 1 是否有一个映射 $f: \mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$, 满足

$$f^{(1989)}(x)=\frac{x}{x+1} \tag{1}$$

（$\mathbf{R}^+$ 表示正实数所成的集）?

解 映射 $f(x)=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1\,989}}$ 满足要求. 事实上, $\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1\,989}$, $\dfrac{1}{f^{(2)}(x)}=\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{1}{1\,989}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{1\,989}$, $\cdots$, $\dfrac{1}{f^{(k)}(x)}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{k}{1\,989}$, $\cdots$, $\dfrac{1}{f^{(1\,989)}(x)}=\dfrac{1}{x}+1$.

例 2 是否有一个映射 $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$, 满足

$$f^{(64)}(x)=(\sqrt{x}+1)^2? \tag{2}$$

解 映射 $f(x)=\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{64}\right)^2$ 满足要求. 事实上, $\sqrt{f(x)}=\sqrt{x}+\dfrac{1}{64}$, $\sqrt{f^{(2)}(x)}=\sqrt{f(x)}+\dfrac{1}{64}=\sqrt{x}+\dfrac{2}{64}$, $\cdots$, $\sqrt{f^{(k)}(x)}=\sqrt{x}+\dfrac{k}{64}$, $\cdots$, $\sqrt{f^{(64)}(x)}=\sqrt{x}+1$.

更一般地, $f(x)=g(g^{-1}(x)+b)$ 满足

$$f^{(n)}(x)=g(g^{-1}(x)+nb), \tag{3}$$

其中 g 是一一对应, b 为任意常数. 事实上,

$$g^{-1}(f(x))=g^{-1}(x)+b,$$

$$g^{-1}(f^{(2)}(x))=g^{-1}(f(x))+b=g^{-1}(x)+2b,$$

$$\cdots\cdots$$

$$g^{-1}(f^{(n)}(x))=g^{-1}(x)+nb.$$

例 1、例 2 分别是 $g(x)=\dfrac{1}{x}$, x^2 的特殊情况.

例 3 是否存在映射 f: $\mathbf{N}\to\mathbf{N}$, 满足

$$f(f(n))=f(n)+n, \tag{4}$$

$$f(1)=2, \tag{5}$$

$$f(n+1)>f(n)? \tag{6}$$

解 常见的线性函数 $f(x)=ax$ 若满足(4),则

$$f(f(n))=a^2n=an+n,$$

从而 $a=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$. 但$\frac{\sqrt{5}+1}{2}x$ 不是 $\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 的映射. 为保证 f 取整值,令 $f(x)=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}x\right]$. 它满足(6),不满足(5),(4)(左边比右边小 1). 因此还需适当修改. 令

$$f(x)=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}x+b\right], \tag{7}$$

其中 $0<b<1$ 是一个待定的常数. 这时

$$f(f(n))=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}f(n)+b\right]=\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}f(n)+b\right]+f(n)$$

$$=\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}n+b\right]+b\right]+f(n)$$

$$=f(n)+n+\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}b-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left\{\frac{\sqrt{5}+1}{2}n+b\right\}\right], \tag{8}$$

其中 $\{x\}=x-[x]$ 为 x 的小数部分. 我们希望(8) 的最后一式中[] 的项为 0,即

$$0<\frac{\sqrt{5}+1}{2}b-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left\{\frac{\sqrt{5}+1}{2}n+b\right\}<1. \tag{9}$$

这只要令$\frac{\sqrt{5}+1}{2}b=1$ 即 $b=\frac{\sqrt{5}-1}{2}$. 此时

$$f(x)=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}x+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right] \tag{10}$$

满足全部要求.

例 1～例 3 中的映射都不是唯一的.

2.5 构造映射(Ⅱ)

例 1 试求出所有的映射 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$,使得对于一切 x, $y \in \mathbf{R}$,都有

$$f(x^2+f(y)) = y+(f(x))^2. \qquad (1)$$

解 $f(x)=x$ 显然满足(1).问题是有没有其他满足要求的映射.

设 f 满足要求,则由(1)及其中 y 可取一切实数得 f 为满射.

若 $f(y_1)=f(y_2)$,则由(1)得

$$y_1+f^2(x) = f(x^2+f(y_1))$$

$$=f(x^2+f(y_2)) = y_2+f^2(x),$$

从而 $y_1=y_2$. 于是 f 为单射.

在(1)中将 x 换为 $-x$,得

$$y+f^2(-x) = f(x^2+f(y)) = y+f^2(x),$$

从而

$$f^2(-x) = f^2(x),$$

$$f(-x) = f(x) \text{ 或 } f(-x) = -f(x).$$

由于 f 是单射,当 $x \neq 0$ 时,$f(-x) \neq f(x)$.所以,当 $x \neq 0$ 时,$f(-x) = -f(x)$,并且 $f(-x)$, $f(x)$均非 0.

由于 f 是满射,必有 $f(0)=0$.

在(1)中令 $x=0$,得

$$f(f(y)) = y. \tag{2}$$

因此,对任一实数 y,由(1),(2)得

$$f(x^2+y) = f(x^2+f(f(y))) = f(y)+f^2(x) \geqslant f(y),$$

这表明 f 是增的,即对于 $y'(=x^2+y) > y$,恒有

$$f(y') > f(y). \tag{3}$$

若有 x 使 $f(x) > x$,则由(2),(3),

$$x = f(f(x)) > f(x) > x,$$

矛盾. 所以恒有 $f(x) \leqslant x$. 同理 $f(x) \geqslant x$. 因此,$f(x) = x$ 是唯一满足要求的映射.

例 2 构造一个整系数多项式 $f(x)$,使得 f: $\mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ 是单射,而 f: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 不是单射.

解 一次多项式在 $\mathbf{R}$ 上是单射,二次多项式(图象为抛物线)在 $\mathbf{Q}$ 上不是单射. 因此 f 至少是三次多项式.

令 $f(x) = x^3 - 2x$. 我们证明它满足要求.

若有 $f(x) = f(t)$,即 $x^3 - 2x = t^3 - 2t$,则

$$(x-t)(x^2+xt+t^2-2) = 0. \tag{4}$$

当 $x \neq t$ 并且 $x^2 \leqslant \frac{8}{3}$ 时,$t = \frac{-x \pm \sqrt{8-3x^2}}{2}$ 使(4)成立. 因此在 $\mathbf{R}$ 上,f 不是单射.

对于有理数 x,若 $\sqrt{8-3x^2}$ 为有理数 y,则 $8-3x^2 = y^2$,去分母得

$$8m^2 - 3n^2 = l^2. \tag{5}$$

于是(5)有整数解 l, m, n,其中 m 不等于 0.

若 m, n 有大于 1 的公因数 d,则由(5),$d^2 \mid l^2$,从而 $d \mid l$. 可在(5)的两边同时除以 d. 因此可设(5)中 m, n 互质

$\left(\text{否则用}\frac{m}{d},\ \frac{n}{d},\ \frac{l}{d}\text{代替} m,\ n,\ l \text{进行讨论}\right)$.

若 $3|m$,则由(5),$3|l$,从而 $3^2|3n^2$, $3|n^2$, $3|n$. 与 m, n 互质矛盾. 若 $3\nmid m$,则 $3\nmid l$. 由(5)mod 3 得

$$2\equiv 1\ (\mathrm{mod}\ 3),$$

矛盾. 因此(5)没有整数解 l, m, n,其中 m 不等于 0.

这样,$\sqrt{8-3x^2}$ 不是有理数. 在 $\mathbf{Q}$ 上,(4)仅当 $t=x$ 时成立. 即在 $\mathbf{Q}$ 上 f 为单射.

例 3 是否存在函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,使得

$$f(f(x))=x^2-2 \tag{6}$$

对所有 $x\in\mathbf{R}$ 成立?

解 考虑映射 $f^{(2)}$ 与 $f^{(4)}$ 的不动点. 由

$$x=f^{(2)}(x)=x^2-2,$$

得 $f^{(2)}$ 的不动点为 2, -1. 由

$$\begin{aligned}x=f^{(4)}(x)&=f^{(2)}(f^{(2)}(x))\\&=(f^{(2)}(x))^2-2=(x^2-2)^2-2,\end{aligned}$$

得 $(x^2-x-2)(x^2+x-1)=0$. 从而 $f^{(4)}$ 的不动点为

$$2,\ -1,\ \alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2},\ \beta=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}.$$

因为 $f^{(4)}(f(\alpha))=f(f^{(4)}(\alpha))=f(\alpha)$,所以 $f(\alpha)$ 也是 $f^{(4)}$ 的不动点.

若 $f(\alpha)=2$,则 $\alpha=f^{(4)}(\alpha)=f^{(3)}(2)=f(2)=f(f(\alpha))=f^{(2)}(\alpha)$. 从而 $\alpha=2$ 或 -1,矛盾. 因此 $f(\alpha)\neq 2$.

同理 $f(\alpha)\neq -1$.

若 $f(\alpha)=\alpha$,则 $f^{(2)}(\alpha)=f(\alpha)=\alpha$,仍得 $\alpha\in\{2,-1\}$,

矛盾.

于是 $f(\alpha)=\beta$. 同理 $f(\beta)=\alpha$. 这样就有

$$f^{(2)}(\alpha)=f(\beta)=\alpha,$$

仍得矛盾.

所求的映射不存在.

注:若限制定义域为$\{x\mid|x|\geqslant 2\}$,则 f 存在. 如

$$f(x)=2\mathrm{ch}\left(\sqrt{2}\mathrm{ch}^{-1}\frac{|x|}{2}\right),$$

其中 $\mathrm{ch}x=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}$ 称为双曲余弦,ch^{-1} 是它的反函数.

2.6 函数方程(Ⅰ)

求映射的问题也常称为函数方程.

函数方程形形色色,没有固定的解法. 前两节已经介绍了一些例题. 本节再举几个例子.

例 1 求所有函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,对任意实数 x, y,均有

$$f(x)f(y)=f(x^2+y^2). \tag{1}$$

解 常数函数 $f(x)=1$ 或 $f(x)=0$ 显然满足要求. 但不知有无其他函数满足要求.

设 f 满足要求. 我们希望通过(1)(应充分利用这个条件)来确定 f.

令 $x=y=0$,由(1)得 $f^2(0)=f(0)$,所以 $f(0)=0$ 或 1.

若 $f(0)=0$,则由(1)

$$f(x^2)=f(x)f(0)=0,$$

即当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=f((\sqrt{x})^2)=0$. 又在(1)中将 y 与 x 都

换成 $-x$，得

$$f^2(-x)=f(2x^2)=f((\sqrt{2}x)^2)=0,$$

所以 $f(x)$ 为常数函数 0.

若 $f(0)=1$，则 $f(x)=f(x)f(0)=f(x^2)$. 只需考虑 f 在正实数上的值. 这时

$$f(x+y)=f((\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2)=f(\sqrt{x})f(\sqrt{y})=f(x)f(y). \tag{2}$$

在(2)中令 $y=x$，得

$$f(2x)=f^2(x)=f(2x^2),$$

又
$$f(2x)=f((2x)^2)=f(4x^2),$$

所以 $f(2x^2)=f(4x^2)$. 令 $2x^2=y$，则 $f(y)=f(2y)$ 对一切 $y>0$ 成立. 所以 $f^2(x)=f(2x)=f(x)$，$f(x)=0$ 或 1.

若有某个 y 使 $f(y)=0$，则由(2)，$f(x+y)=0$，即对比 y 大的 x，$f(x)=0$. 由于

$$f\left(\frac{y}{2^k}\right)=f\left(\frac{y}{2^{k-1}}\right)=\cdots=f(y)=0,$$

所以对一切 $x>0$，$f(x)=0$.

从而本题的解为 $f(x)=0$ 或 $f(x)=1$ 或

$$f(x)=\begin{cases}0, & 若\ x\neq 0;\\ 1, & 若\ x=0.\end{cases}$$

(易知最后这个函数也满足条件.)

例 2 设函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$，不恒为 0，满足条件：对所有 x，$y\in\mathbf{R}$，

(i) $f(xy)=f(x)f(y)$;

(ii) $f(x+\sqrt{2})=f(x)+f(\sqrt{2})$.

求 $f(x)$.

解 显然 $f(x)=x$ 满足要求. 下面证明这是唯一的解.

首先,在(i)中令 $x=y=0$,得

$$f(0)=f^2(0),$$

从而 $f(0)=0$ 或 $f(0)=1$.

若 $f(0)=1$, 则对任一 $y\in\mathbf{R}$,

$$f(y)=f(0)f(y)=f(0)=1.$$

但这时 $f(x+\sqrt{2})=f(x)=f(\sqrt{2})=1$,与(ii) 矛盾. 所以 $f(0)=0$.

同样,在(i)中令 $x=y=1$,得

$$f(1)=f^2(1),$$

从而 $f(1)=1$ 或 $f(1)=0$.

若 $f(1)=0$,则对任一 $y\in\mathbf{R}$,

$$f(y)=f(1)f(y)=0,$$

与 $f(x)$不恒为 0 矛盾. 所以 $f(1)=1$.

其次,我们来"改进"(ii). 对任一 $y\neq 0$,

$$\begin{aligned}f(x+y)&=f\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\left(x\cdot\frac{\sqrt{2}}{y}+\sqrt{2}\right)\right)\\&=f\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)f\left(x\cdot\frac{\sqrt{2}}{y}+\sqrt{2}\right)\\&=f\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)\left(f\left(x\cdot\frac{\sqrt{2}}{y}\right)+f(\sqrt{2})\right)\\&=f\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)f\left(x\cdot\frac{\sqrt{2}}{y}\right)+f\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)f(\sqrt{2})\\&=f(x)+f(y).\end{aligned}$$

上式对 $y=0$ 显然成立. 所以有

(iii) $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

于是 $f(x)+f(-x)=f(0)=0$. 从而 $f(x)$是奇函数，只需考虑 $x>0$.

由 $f(1)=1$ 及(iii)，易知对 $n\in \mathbf{N}$,

$$f(n)=f(n-1)+f(1)=f(n-2)+2f(1)$$

$$=\cdots=nf(1)=n.$$

并且对 m, $n\in \mathbf{N}$,有

$$mf\left(\frac{n}{m}\right)=\underbrace{f\left(\frac{n}{m}\right)+f\left(\frac{n}{m}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{m}\right)}_{m个}$$

$$=f(\underbrace{\frac{n}{m}+\frac{n}{m}+\cdots+\frac{n}{m}}_{m个})=f(n)=n,$$

即

$$f\left(\frac{n}{m}\right)=\frac{n}{m}.$$

于是对一切有理数 x,恒有

$$f(x)=x. \tag{3}$$

只要证明此式在 x 为无理数时也成立.

由于 $f(x^2)=f(x)f(x)=f^2(x)\geqslant 0$,所以当 $x>0$ 时，$f(x)$ 非负. 当 $y>0$ 时，

$$f(x+y)=f(x)+f(y)\geqslant f(x),$$

即 $f(x)$递增.

对任一无理数 c,可以找到与 c 任意接近的有理数 r_1, r_2, $r_1<c<r_2$. 由单调性，

$$r_1 = f(r_1) \leqslant f(c) \leqslant f(r_2) = r_2.$$

因为 r_1，r_2 可与 c 任意接近，所以

$$f(c) = c.$$

于是 $f(x) = x$ 对一切 x 均成立.

注：在得到(iii)后，根据 $f(1) = 1$ 推出对一切有理数 x，(3)成立. 这种方法称为 Cauchy 方法. 但要证明(3)对一切实数成立，仅有(iii)是不够的，必须依靠单调性或连续性，而(i)正好提供了这种性质.

2.7 函数方程(Ⅱ)

函数方程中的条件，可以有各种不同的运用，巧拙相差很大. 不应满足于"解出来"，还应寻求优雅的解法，仔细琢磨领悟优雅的解法.

例1 设 S 表示所有大于 -1 的实数构成的集合. 确定所有的函数：$S \to S$，满足以下两个条件：

(i) 对于 S 内的所有 x 和 y，

$$f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x);$$

(ii) 在区间 $-1 < x < 0$ 与 $x > 0$ 的每一个内，$\frac{f(x)}{x}$ 是严格递增的.

解 由(i)得

$$f(x + f(x) + xf(x)) = x + f(x) + xf(x). \qquad (1)$$

对固定的 x，令 $x + f(x) + xf(x) = c$，则上式即

$$f(c) = c. \qquad (2)$$

将 c 代入(1)并利用(2)，得

$$f(2c+c^2)=2c+c^2. \tag{3}$$

因为 $2+c>2+(-1)=1$,所以 $2c+c^2=c(2+c)$ 与 c 同号.

若 $c>0$,则 $2c+c^2>c$,但(2),(3)导出

$$\frac{f(2c+c^2)}{2c+c^2}=\frac{f(c)}{c}=1,$$

与$\frac{f(x)}{x}$在 $x>0$ 时严格递增矛盾.

若 $c<0$,同样导出矛盾.

因此 $c=0$. 从而对一切 $x\in S$,

$$x+f(x)+xf(x)=0.$$

即

$$f(x)=-\frac{x}{x+1}.$$

不难验证这一函数满足要求.

这一解法巧妙地利用了$\frac{f(x)}{x}$的严格递增,迅速地达到了目的.

例 2 (i) 设函数 f: $[0,1]\to[0,1]$,严格增(减),f^{-1}是它的反函数,并且对所有定义域中的 x 均有

$$f(x)+f^{-1}(x)=2x, \tag{1}$$

求出 f.

(ii) f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,其余条件同(i). 求出 f.

解 (i) 显然 $f(x)=x$ 满足所有要求. 但是否仅有这一个解呢? 这唯一性需要证明.

对任一 $x_0\in[0,1]$,定义

$$x_n = f(x_{n-1}),\ n = 1, 2, \cdots.$$

在(1)中令 $x = x_n$，则

$$x_{n+1} + x_{n-1} = 2x_n,$$

即

$$x_{n+1} - x_n = x_n - x_{n-1}(n = 1, 2, \cdots).$$

从而

$$x_n - x_{n-1} = x_{n-1} - x_{n-2} = \cdots = x_2 - x_1 = x_1 - x_0,$$

$$x_n - x_0 = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots + (x_1 - x_0)$$
$$= n(x_1 - x_0).$$

因为 $x_n \in [0, 1]$，所以

$$|x_1 - x_0| = \frac{1}{n}|x_n - x_0| \leqslant \frac{1}{n}.$$

由此得 $x_1 = x_0$，即 $f(x_0) = x_0$.

由 x_0 的任意性，$f(x) = x$.

(ii) 上面的证明不再适用. 实际上，解也不唯一. 容易验证，

$$f(x) = x + c,\ c \text{ 为任意实数},$$

满足要求.

下面证明只有这种形式的解.

令 $g(x) = f(x) - x$. 在(1)中用 $f(x)$ 代替 x 得

$$f(f(x)) = 2f(x) - x. \tag{2}$$

显然当 $k = 0$ 时，

$$f(x + kg(x)) = f(x) + kg(x). \tag{3}$$

假设上式对 k 成立，则

$$f(x+(k+1)g(x))=f(f(x)+kg(x))$$

$$=f(f(x+kg(x))) \qquad (由(3))$$

$$=2f(x+kg(x))-(x+kg(x)) \qquad (由(2))$$

$$=2(f(x)+kg(x))-(x+kg(x)) \qquad (由(3))$$

$$=f(x)+(k+1)g(x).$$

于是(3)对一切非负整数 k 均成立.

(3)对于负整数 k 也成立. 事实上, $x-g(x)=f^{-1}(x)$, $f^{-1}(f^{-1}(x))=2f^{-1}(x)-x$, 所以由(3)可得

$$f^{-1}(x+kg(x))=f^{-1}(f^{-1}(f(x)+kg(x)))$$

$$=2f^{-1}(f(x)+kg(x))-(f(x)+kg(x))$$

$$=2(x+kg(x))-(f(x)+kg(x))$$

$$=kg(x)+x-g(x),$$

即

$$f(x+(k-1)g(x))=x+kg(x)$$

$$=f(x)+(k-1)g(x).$$

这表明从(3)对 k 成立可导出(3)对 $k-1$ 也成立.

于是(3)对一切整数 k 成立.

不妨设 $f(x)$ 递增. 用 $\wedge$ 表示 $>$, $=$, $<$ 三者之一, $\vee$ 表示与 $\wedge$ 方向相反的不等号. 对任意 $x_2>x_1$,

$$x_2-x_1 \wedge k(g(x_1)-g(x_2))$$

$$\Leftrightarrow \quad x_2+kg(x_2) \wedge x_1+kg(x_1)$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x_2+kg(x_2)) \wedge f(x_1+kg(x_1))$$

$$\Leftrightarrow \quad f(x_2)+kg(x_2) \wedge f(x_1)+kg(x_1)$$

(由(3))

$$\Leftrightarrow \quad x_2 + (k+1)g(x_2) \wedge x_1 + (k+1)g(x_1)$$

$$\Leftrightarrow \quad x_2 - x_1 \wedge (k+1)(g(x_1) - g(x_2)).$$

若 $g(x_1) \neq g(x_2)$，则总可选择整数 m，使

$$m(g(x_1) - g(x_2)) < 0 < x_2 - x_1.$$

由上面的证明，

$$(m \pm 1)(g(x_1) - g(x_2)) < x_2 - x_1.$$

$m \pm 1$ 又可换成 $m \pm 2$，……. 这样继续下去，左边可变成任意大的正数，矛盾. 所以

$$g(x) = C, \ C \text{ 为常数}.$$

从而

$$f(x) = x + C.$$

上面的解法固然有很高的技巧，但显得臃肿，下面的解法较为轻灵.

又解 若 $f(x_0) = x_0 + t$，则 $f^{-1}(x_0 + t) = x_0$，

$$f(x_0 + t) = 2(x_0 + t) - x_0 = x_0 + 2t,$$

$$f^{-1}(x_0) = 2x_0 - (x_0 + t) = x_0 - t,$$

$$f(x_0 - t) = x_0,$$

$$\cdots\cdots$$

于是有链

$$\cdots x_0 - 2t \stackrel{f}{\longmapsto} x_0 - t \stackrel{f}{\longmapsto} x_0 \stackrel{f}{\longmapsto} x_0 + t \stackrel{f}{\longmapsto} x_0 + 2t \stackrel{f}{\longmapsto} \cdots,$$

其中 $a \stackrel{f}{\longmapsto} b$ 表示 $f(a) = b$.

(a) 因为 $f(x)$ 的值限制在区间[0, 1]内，必有 $t = 0$（否则存在正整数 k，使 $x_0 + kt$ 溢出区间[0, 1]）. 所以 $f(x) = x$.

(b) 设 $x_0' \neq x_0$，$f(x_0') = x_0' + t'$. 又有一链

$$\cdots x_0'-2t' \overset{f}{\longmapsto} x_0'-t' \overset{f}{\longmapsto} x_0' \overset{f}{\longmapsto} x_0'+t' \overset{f}{\longmapsto} x_0'+2t' \overset{f}{\longmapsto} \cdots.$$

若 $t' \neq t$，不妨设 $t' > t$. 当自然数 k 充分大时，

$$x_0' + kt' - (x_0 + kt) = (x_0' - x_0) + k(t' - t) > 0.$$

由单调性得

$$x_0' + (k-1)t' > x_0 + (k-1)t,$$

$$x_0' + (k-2)t' > x_0 + (k-2)t,$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_0' > x_0,$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_0' - ht' > x_0 - ht.$$

但当自然数 h 充分大时，$x_0' - ht' < x_0 - ht$，矛盾. 因此必有 $t' = t$.

从而 $f(x) = x + C$，C 为常数.

注：(i)不需要单调性. (ii)没有单调性时，函数值可形成许多条链，不同链上 $f(x) - x$ 的值可以不同，如

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbf{Q}; \\ x + C, & x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q} \end{cases}$$

等等，均符合要求.

2.8 链

上一节例 2 中出现的链在构造映射时非常有用.

例 1 是否存在函数 $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$，使得对每一个 $n \in \mathbf{N}$，都有

$$f^{(1995)}(n) = 2n? \tag{1}$$

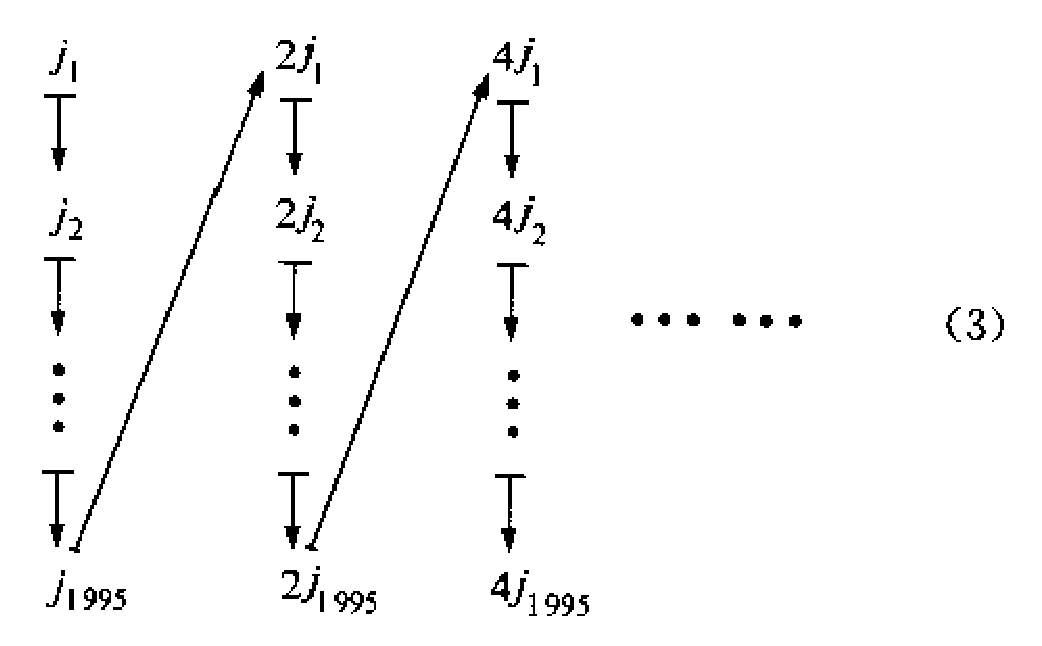
解 所述函数是存在的,而且有无穷多个.

为了作出这样的函数,任取一个奇数 j,从 j 出发可以得到一条链

$$j \longmapsto 2j \longmapsto 4j \longmapsto 8j \longmapsto \cdots. \qquad (2)$$

这样的链有无穷多条($j=1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots$).

将每 1 995 条链组成一条新链,如下图所示:



这时每一个自然数 n 恰在一条新链中出现.

令 $f(n)$ 为与 n 在同一条新链中,n 后面的那个数,显然 f 满足要求.

由于新链组成的任意性(任 1 995 条组合在一起),合乎要求的 f 有无穷多个.

解决例 1 的关键是从常见的公式法中跳出来(不能只想到线性函数或其他用公式表示的函数),考虑一般的映射,其中的对应关系可用 $\longmapsto$ 表示.

上面的(2),每一项 n 的后一项恰好是 $f^{(1995)}(n)$,所以这样的链就表示了函数 $f^{(1995)}$(的对应关系). 同样地,新链表示函数 f,它是利用 $f^{(1995)}$ 的链作成的(虽然从定义来说,先有

f，后有 $f^{(1995)}$，但在构造时，恰恰将这个顺序反过来. 这有些像"分析法").

例 2 $f(n)$定义在自然数集 **N** 上，并且

(i) 对所有 $n \in \mathbf{N}$, $f(f(n)) = 4n + 9$;

(ii) 对所有 $k \in \mathbf{N}$, $f(2^{k-1}) = 2^k + 3$.

问是否一定有 $f(n) = 2n + 3$?

解 $f(n) = 2n + 3$ 显然满足(i)，(ii). 但满足(i)，(ii)的函数并非只有一个. 为了说明这一点，我们构造一个满足(i)，(ii)并且不同于 $2n + 3$ 的函数.

为此，当 $3 \nmid n$ 时，令 $f(n) = 2n + 3$. 而当 $3 \mid n$ 时，依照例 1 编链.

首先作链(链中每一项为前一项的 4 倍加 9)：

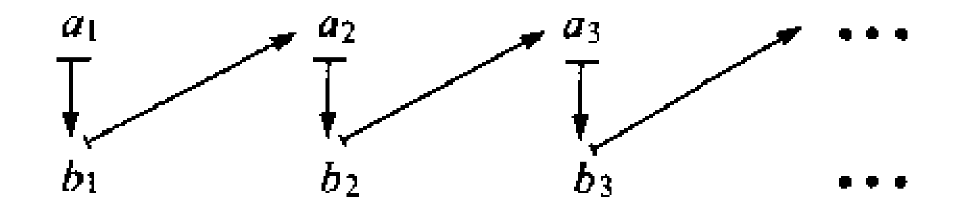
$$3 \times 1 \longmapsto 3 \times (4 \times 1 + 3) \longmapsto 3 \times (4^2 + 15) \longmapsto \cdots.$$

设已作了 m 条链. 在这些链外还有形如 $3k$ ($k \in \mathbf{N}$)的数(事实上，有无穷多个被 12 整除的正整数 $3k$，而每条链中只有链首可能是这种数)，取其中最小的 $3k$，作链(规律同前)

$$3k \longmapsto 3(4k + 3) \longmapsto 3(16k + 15) \longmapsto \cdots.$$

这样，每一个被 3 整除的 n 均在且仅在一条链中出现.

将每两条链$\{a_n\}$，$\{b_n\}$编成一条新链：



对每个被 3 整除的 n，令 $f(n)$为新链上紧接着 n 的项，则 $f(f(n)) = 4n + 9$.

这样就得出无穷多个合乎要求的函数 f，而 $f(n) = 2n +$

3 并不恒成立.

每一个函数均可用链表示，所以链不仅可用于构造函数，也可用于有关函数的证明题.

例 3 求证存在 $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$，满足

$$f^{(k)}(n) = n + a \ (n \in \mathbf{N}) \tag{4}$$

的充分必要条件是 a 为非负整数并且 $k \mid a$.

解 条件是充分的. 当 $k \mid a$ 时，令

$$f(n) = n + \frac{a}{k}, \tag{5}$$

则

$$f^{(k)}(n) = n + \underbrace{\frac{a}{k} + \frac{a}{k} + \cdots + \frac{a}{k}}_{k\text{个}} = n + a.$$

条件也是必要的. 由于 $f: \mathbf{N} \to \mathbf{N}$，所以 a 为整数. 由于 $f^{(k)}(1) = 1 + a \in \mathbf{N}$，所以 a 为非负整数. 为了证明(5)成立，不妨设 $a > 0$. 首先注意 f 是单射，即对于不同的自然数 n，函数值 $f(n)$ 也互不相同. 事实上，若

$$f(n_1) = f(n_2),$$

那么由(4)式

$$n_1 + a = f^{(k)}(n_1) = f^{(k)}(n_2) = n_2 + a$$

导出 $n_1 = n_2$(这一结论亦可由 2.2 节例 1 推出，因为 $f^{(k)}(n) = n + a$ 是单射).

自然数集 $\mathbf{N}$ 可以分为若干条链，链中每一项 n 的后面是 $f(n)$.

由于 f 是单射，每两条链不相交.

每条链的前 k 项

$$b,\ f(b),\ f^{(2)}(b),\ \cdots,\ f^{(k-1)}(b)$$

均不大于 a (若 $f^{(j)}(b)=c>a$，则 $d=c-a$ 满足 $f^{(k)}(d)=c$. 从而 d, $f(d)$, …, $f^{(k)}(d)=c=f^{(j)}(b)$ 均与 $f^{(j)}(b)$ 在同一链中，并且 $f^{(j)}(b)$ 至少是链中的第 $k+1$ 项)，其余的项均大于 a(等于在它前面 k 项的那个数加 a). 因此，1, 2, …, a 这 a 个数分在 l 条链中，每条恰含 k 个这样的数，所以

$$kl=a,$$

即(5)式成立.

这种表示函数(对应)关系的链也可称为轨道，以免与第四章中集合的链混淆.

2.9 图

如果将元素用点表示，某两个元素之间存在一种关系就用一条线(段)相连，那么就得到一个反映这种关系的图. 其中的线通常称为边.

例 1 某地，若一个人的朋友少于 10 个，称为寡合者；若一个人的朋友都是寡合者，称为怪杰. 证明怪杰的个数不大于寡合者的个数.

解 设不是怪杰的寡合者所成集为 A，不是寡合者的怪杰所成集为 B，既是怪杰又是寡合者所成的集为 C. 又设 $|A|=m$, $|B|=n$. 要证

$$m\geqslant n. \tag{1}$$

将人用点表示. 若两个人是朋友，就在相应的两个点之间连一条边. 这样得到一个图.

B 的元素，因为是怪杰，所以只能与 A, C 中的元素相

连. 又因为 C 中的元素是怪杰，而 B 中的元素不是寡合者，所以 B, C 中的元素不相连. 于是 B 中元素只与 A 中元素相连.

B 中每个元素至少引出 10 条边(因为他们都不是寡合者)，所以 A, B 之间至少有 $10n$ 条边.

另一方面，A 中每个元素都是寡合者，所以引出的边数少于 10 条，从而 A, B 之间的边数不超过 $10m$ 条.

因而 $10n \leqslant 10m$，即(1) 成立.

注：当 A, B 都是空集时，(1)成为等式.

例 2 对于任一自然数 k，若 k 为偶数，将它除以 2，若 k 为奇数，将它加上 1，这称为一次运算. 设恰经过 n 次运算变成 1 的数有 a_n 个，试求 a_{15}.

解 将自然数 k 用点表示. 若 k 经一次运算得到 h，就作一条从 k 到 h 的向量. 这样得到的图称为有向图. 如图 2.9.1 所示(这个图应有无穷多个点，我们只作到第 6 层).

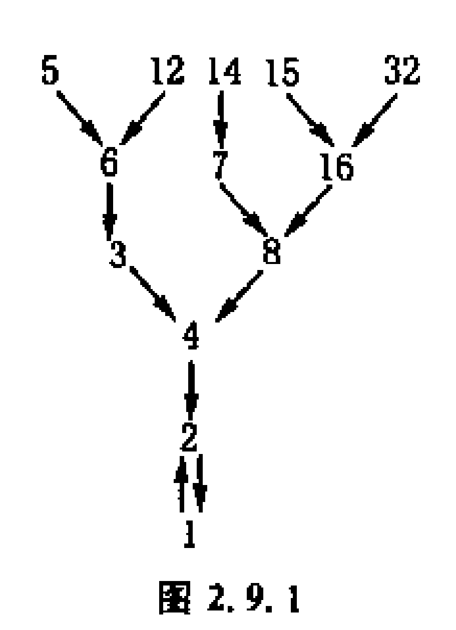


图 2.9.1

显然 $a_1 = 1$ (只有第 2 层的 2 恰经过一次运算变成 1)，$a_2 = 1$ (只有第 3 层的 4 恰经过两次运算变成 1).

对于 $n \geqslant 2$，第 $n+1$ 层的 a_n 个恰经过 n 次运算变成 1 的

数中，每一个奇数 m，只有 $2m$ 恰经过一次运算变成 m；每一个偶数 m，有 $2m$ 与 $m-1$ 两个数恰经过一次运算变成 m. 因此，更上一层的 a_{n+1} 个数比这一层的 a_n 个数多出的个数 $a_{n+1}-a_n$ 就是这 a_n 个数中偶数的个数.

第 $n+1$ 层的偶数经一次运算变为第 n 层的 a_{n-1} 个数. 因此

$$a_{n+1}-a_n=a_{n-1},$$

即

$$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}. \tag{2}$$

由递推关系(2)及初始条件 $a_1=a_2=1$，不难逐步推出

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

注 1：序列 $\{a_n\}$ 就是著名的 Fibonacci 数列. 在项数不太大时，用递推公式计算 a_n 比用通项公式简单.

注 2："每一个自然数都可以经过有限步运算变为 1"，这称为角谷猜测，至今未能证明.

例 3 30 个足球队，每个队与同样多的队赛过，每次比赛都决出胜负(无平局). 胜的场数大于负的场数的球队至多有多少个？

解 每场比赛一胜一负，因此各队胜的场数之和恰好等于各队负的场数之和.

如果每个队胜的场数均大于负的场数，那么各队胜的场数之和大于各队负的场数之和，矛盾. 所以至多有 29 个队胜的场数大于负的场数.

我们指出 29 个队胜的场数大于负的场数是可能. 为此，

将这 29 个队用 29 个点表示，并记为 v_1，v_2，…，v_{29}. 约定 $v_{i+29}=v_i(i=1,2,\cdots)$.

令 v_i 胜 v_{i+1}，v_{i+2}，…，$v_{i+14}(i=1,2,\cdots)$，则这 29 个球队每个队各胜 14 场，负 14 场. 再加入一个点 u 表示第 30 个队，它负于 v_1，v_2，…，v_{29}，则 v_1，v_2，…，v_{29} 胜的场数均大于负的场数.

注 1：如果在胜队与负队之间作一向量，那么上面 30 个点每两个点之间均有一条向量，这样的图称为竞赛图. 如果每两个点之间连一条边（而不是向量），这样的图称为完全图. 参见 3.7 节例题.

注 2：更一般地，将 30 改为 $n(\geqslant 2)$，则胜的场数大于负的场数的队至多为：

$$\begin{cases} n-1, & \text{若 } n \text{ 为偶数;} \\ n-2, & \text{若 } n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

第三章　有限集的子集

3.1　子集的个数

从本节起，考虑集 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集. X 的全体子集所成的族记为 $P(X)$. $P(X)$ 也是集，它的元素是 X 的子集. 这种以集为元素的集习惯上称为族或类.

例如 $X=\{1, 2, 3\}$，则

$$P(X)=\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

$P(X)$ 有多少个元，即 X 共有多少个子集？

为了回答这一问题，我们考虑如何构成 X 的子集. 元素 $i\ (1\leqslant i\leqslant n)$，可以归入这个子集，也可以不归入这个子集，即 i 有两种归属. n 个元 $1, 2, \cdots, n$ 共有

$$\underbrace{2\times 2\times\cdots\times 2}_{n\text{个}}=2^n$$

种归属. 每一种归属产生 X 的一个子集. 不同的归属产生不同的子集，而且每一个子集均由一种归属产生. 从而

$$|P(X)|=2^n; \tag{1}$$

即 X 有 2^n 个子集.

上面的解法也可以说成每一个从 X 到 $\{0, 1\}$ 的映射产生一个子集 A，它由映射成 1 的那些元素组成. 不同的映射产生

不同的子集，每一个子集都可由这种映射产生(对于子集 A，令

$$\lambda_{A(x)}=\begin{cases}1, & 若\ x\in A;\\ 0, & 若\ x\notin A.\end{cases}\tag{2}$$

则 $\lambda_{A(x)}$ 是 $X\to\{0,1\}$ 的映射，而且 $\lambda_{A(x)}$ 产生子集 A). 所以子集的个数就是映射的个数. 而由于每个元均有映为 0 与映为 1 两种可能，所以映射的个数为 2^n(2.1 节例 3(i) $m=2$ 的特例)，即 X 的子集的个数为 2^n.

映射(2)称为子集 A 的**特征函数**.

本题还有另一种解法：

X 的 k 元子集即从 n 个元中取 k 个的组合，共有 C_n^k 个 ($k=0,1,\cdots,n$)，因此 X 的子集共

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$$

个. 其中包括空集 $\varnothing$ 与 X 本身.

用上面的方法不难得出含 X 中 k 个指定元素的子集共 2^{n-k} 个. 特别地，含一个指定元素(例如 n)的子集共 2^{n-1} 个.

$P(X)$ 的子集 $\mathscr{A}$ 也是 X 的子集族，$\mathscr{A}$ 的元是 X 的子集. 有时为了突出 $\mathscr{A}$ 的元 A 是 X 的子集，我们说 A 是 $\mathscr{A}$ 中的子集. 请注意不要与 $\mathscr{A}$ 的子集混淆. $\mathscr{A}$ 的子集是 X 的子集族，$\mathscr{A}$ 中的子集是 X 的子集，即 $\mathscr{A}$ 的元.

子集族也是集. 因此可以讨论子集族 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ 的并、交、对称差等. 子集族的子集也称为子族.

3.2 两两相交的子集

设 $\mathscr{A}\subseteq P(X)$ 是 X 的一个子集族，即 X 的一些子集所成的集. $\mathscr{A}$ 中的每两个元(X 的两个子集) X_i, X_j 具有性质

$X_i \cap X_j \neq \varnothing$. 问 $\mathscr{A}$ 中至多有多少个元?

显然在 $X_i \in \mathscr{A}$ 时,它的补集 $X_i' \notin \mathscr{A}$. 因为 X_i 不同时,X_i' 不同. 所以至少有 $|\mathscr{A}|$ 个 X 的子集不属于 $\mathscr{A}$. 从而 $|\mathscr{A}| \leqslant |P(X)| - |\mathscr{A}|$,

$$|\mathscr{A}| \leqslant \frac{1}{2}|P(X)| = \frac{1}{2} \times 2^n = 2^{n-1}.$$

另一方面,X 的含 n 的子集共 2^{n-1} 个,每两个的交非空,所以 $\mathscr{A}$ 中至多有 2^{n-1} 个元.

更有趣的,我们有下面的命题:

若子集族 $\mathscr{A}$ 中每两个元 $X_i \cap X_j \neq \varnothing$, 并且 $|\mathscr{A}| < 2^{n-1}$, 则总可以补充若干个 X 的子集到 $\mathscr{A}$ 中,使得 $\mathscr{A}$ 仍保持每两个元 $X_i \cap X_j \neq \varnothing$ 的性质,并且 $|\mathscr{A}| = 2^{n-1}$.

证明 因为 $|\mathscr{A}| < 2^{n-1}$, 所以必有一个 X 的子集 $A \notin \mathscr{A}$ 并且 $A' \notin \mathscr{A}$. 如果 A 与 $\mathscr{A}$ 中每个元的交均非空,将 A 加到 $\mathscr{A}$ 中. 否则 $\mathscr{A}$ 中必有一个元 B,满足 $B \cap A = \varnothing$, 从而 $B \subset A'$. 将 A' 加到 $\mathscr{A}$ 中,由于 $\mathscr{A}$ 中每个元与 B 有非空交,所以它们与 A' 有非空交.

于是总可将 A 或 A' 加入 $\mathscr{A}$ 中,使 $|\mathscr{A}|$ 增加 1,同时 $\mathscr{A}$ 中每两个元有非空交. 这样继续下去便可使 $|\mathscr{A}|$ 达到最大值 2^{n-1}, 并且 $\mathscr{A}$ 中每两个元有非空交.

3.3 奇 偶 子 集

设 A 是 X 的子集. 若 A 中所有数的和为奇数,则称 A 为 X 的奇子集. 若 A 中所有数的和为偶数,则称 A 为 X 的偶子集.

(i) 求 X 的奇子集的个数与偶子集的个数;

(ii) 求 X 的所有奇子集的元素和的和.

解 设 A 是 X 的奇子集. 考虑映射 f:

$$A \longmapsto A - \{1\}, \text{若 } 1 \in A;$$

$$A \longmapsto A \cup \{1\}, \text{若 } 1 \notin A.$$

显然 f 是将奇子集映为偶子集的映射. f 是单射,即对不同的 A, $f(A)$不同.

f 是满射,即对每一个偶子集 B,都有一个 A,满足 $f(A) = B$. 事实上,当 $1 \in B$ 时,令 $A = B - \{1\}$; 当 $1 \notin B$ 时,令 $A = B \cup \{1\}$; 则 $f(A) = B$.

于是 f 是从奇子集族到偶子集族的一一对应. 从而 X 的奇子集与偶子集个数相等,都等于 $\frac{1}{2} \mid P(X) \mid = \frac{1}{2} \times 2^n = 2^{n-1}$.

作为 (i) 的推论, X 的含 1 的奇子集有 2^{n-2} $\left(= \frac{1}{2} \times 2^{n-1}\right)$ 个;不含 1 的奇子集也有 2^{n-2} 个.

X 的所有子集的元素和的和是

$$2^{n-1} \times (1 + 2 + \cdots + n) = 2^{n-2} n(n+1)$$

(因为任一元素 i 在 2^{n-1} 个子集中出现).

对应上面的映射 f,每个含 1 的奇子集 A 比偶子集 B 多一个 1,因而元素和多 1. 所有含 1 的奇子集(2^{n-2} 个)的元素和的和比所有不含 1 的偶子集的元素和的和多 2^{n-2}.

同样,所有不含 1 的奇子集的元素和的和比所有含 1 的偶子集的元素和的和少 2^{n-2}.

因此,所有奇子集的元素和的和与所有偶子集的元素和的和相等,都等于

$$\frac{1}{2}\times 2^{n-2}n(n+1)=2^{(n-3)}n(n+1).$$

3.4 另一种奇偶子集

设集合 $X=\{1,2,\cdots,n\}$. 若 X 的非空子集 A 中奇数的个数大于偶数的个数,则称 A 是奇子集. 试求:

(1) X 的奇子集的个数;

(2) X 的所有奇子集的元素和的总和.

解 (1) 若 $n=2k+1$ (k 为非负整数). 设 A 为 X 的子集(包括空集),则 A 与 A' 中恰有一个为奇子集,从而奇子集的个数为 $\frac{1}{2}\times 2^n=2^{n-1}$.

若 $n=2k$ (k 为正整数). 这时一个奇子集有 i ($1\leqslant i\leqslant k$) 个奇数, j ($0\leqslant j<i$) 个偶数,所以奇子集的个数

$$M=\sum_{i=1}^{k}C_k^i\sum_{j=0}^{i-1}C_k^j=\sum_{i=1}^{k}C_k^i\sum_{j=k+1-i}^{k}C_k^j=\sum_{i+j\geqslant k+1}C_k^iC_k^j$$

$=(1+x)^k\cdot(1+x)^k$ 中次数大于 k 的项的系数和

$=(1+x)^{2k}$ 中次数大于 k 的项的系数和

$$=\sum_{t=k+1}^{2k}C_{2k}^t=\sum_{t=0}^{k-1}C_{2k}^t=\frac{1}{2}\left(\sum_{t=0}^{2k}C_{2k}^t-C_{2k}^k\right)$$

$$=2^{2k-1}-\frac{1}{2}C_{2k}^k=2^{n-1}-\frac{1}{2}C_n^{\frac{n}{2}}.$$

(2) 若 $n=2k+1$ (k 为非负整数). 含有奇数 t 的奇子集有 $\sum_{i=0}^{k}C_k^i\sum_{j=0}^{i}C_k^j$ 个. 与(1)类似,

$$\sum_{i=0}^{k} C_k^i \sum_{j=0}^{i} C_k^j = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \sum_{j=k-i}^{k} C_k^j = \sum_{i+j\geqslant k} C_k^i C_k^j$$

$=(1+x)^{2k}$ 中次数大于 $k-1$ 的项的系数和

$$= \sum_{j=k}^{2k} C_{2k}^j = 2^{2k-1} + \frac{1}{2} C_{2k}^k.$$

含有偶数 s 的奇子集有 $\sum_{i=2}^{k} C_{k+1}^i \sum_{j=0}^{i-2} C_{k-1}^j$ 个,

$$\sum_{i=2}^{k} C_{k+1}^i \sum_{j=0}^{i-2} C_{k-1}^j = \sum_{i=2}^{k} C_{k+1}^i \sum_{j=k+1-i}^{k} C_{k-1}^j = \sum_{i+j\geqslant k+1} C_{k+1}^i C_{k-1}^j$$

$=(1+x)^{k+1}(1+x)^{k-1}$ 中次数大于 k 的项的系数和

$$= \sum_{j=k+1}^{2k} C_{2k}^j = 2^{2k-1} - \frac{1}{2} C_{2k}^k.$$

因此,所求的和为

$$\left(2^{2k-1} + \frac{1}{2} C_{2k}^k\right)(1+3+5+\cdots+(2k+1))$$

$$+\left(2^{2k-1} - \frac{1}{2} C_{2k}^k\right)(2+4+\cdots+2k)$$

$$=2^{2k-1} \cdot \frac{(2k+1)(2k+2)}{2} + \frac{1}{2} C_{2k}^k \cdot (k+1)$$

$$=n(n+1) \cdot 2^{n-3} + \frac{n+1}{4} C_{n-1}^{\frac{n-1}{2}}.$$

若 $n=2k$ (k 为正整数). 类似地,所求和为

$$n(n+1) \cdot 2^{n-3} - \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right) C_{n-1}^{\frac{n}{2}}.$$

3.5 Graham 的一个问题

美国数学家 Graham 曾提出一个问题:

对 X 的一个子集族 $\mathscr{A}$,定义

$$\mathscr{A}^* = \{A \mid A\text{ 是 }\mathscr{A}\text{中奇数个集的子集}\}.$$

(例如 $X=\{1, 2, 3\}$, $\mathscr{A}=\{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$,则 $\mathscr{A}^* = \{\{1\}, \varnothing, \{1, 2, 3\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$.)证明:

$$(\mathscr{A}^*)^* = \mathscr{A}. \tag{1}$$

这里提供三种解法.

解法一 对于 $\mathscr{A}$,我们令 f 为它的特征函数. 即 f 是从 $P(X)$到$\{0, 1\}$的映射,满足:

$$f(A) = \begin{cases} 1, & \text{若 } A \in \mathscr{A}; \\ 0, & \text{若 } A \notin \mathscr{A}. \end{cases}$$

同样,$\mathscr{A}^*$ 的特征函数 f^* 满足:

$$f^*(A) = \begin{cases} 1, & \text{若 } A \in \mathscr{A}^*; \\ 0, & \text{若 } A \notin \mathscr{A}^*. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{若 } \mathscr{A}\text{中奇数个集含 } A; \\ 0, & \text{其他情况}. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{若 } |\{B \mid B \supseteq A,\ f(B)=1\}| \text{ 为奇数}; \\ 0, & \text{其他情况}. \end{cases}$$

$$= \sum_{B \supseteq A} f(B).$$

(这里的和应 mod 2,即和为奇数时,它就是 1. 和为偶数时,它就是 0.)

$(\mathscr{A}^*)^*$ 的特征函数 f^{**} 满足:

$$f^{**}(\mathscr{A}) = \begin{cases} 1, & \text{若 } A \in (\mathscr{A}^*)^*; \\ 0, & \text{若 } A \notin (\mathscr{A}^*)^*. \end{cases}$$

根据上面所说,

$$f^{**}(A)=\sum_{B\supseteq A}f^{*}(B)=\sum_{B\supseteq A}\sum_{C\supseteq B}f(C)$$

$$=\sum_{C\supseteq A}f(C)\sum_{C\supseteq B\supseteq A}1,$$

后一和号表示满足 $C\supseteq B\supseteq A$ 的子集 B 的个数. 容易知道这个和应为 $2^{|C|-|A|}$（相当于 2.1 节中末段所说的 2^{r-k} ）. 于是

$$f^{**}(A)=\sum_{C\supseteq A}f(C)\cdot 2^{|C|-|A|}.$$

当 $C=A$ 时，$2^{|C|-|A|}$ 为奇数(即 1)；$C\neq A$ 时 $2^{|C|-|A|}$ 为偶数(即 0). 所以，

$$f^{**}(A)=f(A). \tag{2}$$

(2) 表明 $\mathscr{A}$ 与 $(\mathscr{A}^{*})^{*}$ 的特征函数相同，因此(1)成立.

另一种与解法一实质相同的叙述见《数学竞赛研究教程》(单墫著，江苏教育出版社 1993 年出版).

解法二 利用对称差，易知

$$X=\{1\}\triangle\{2\}\triangle\cdots\triangle\{n\}. \tag{3}$$

又由 * 的定义，对任一集 A，

$$(\{A\})^{*}=P(A). \tag{4}$$

(A 的每个子集都含于$\{A\}$的唯一元素 A 中.)

$$(P(A))^{*}=A. \tag{5}$$

(A 的子集 C 被 $P(A)$ 中 $2^{|A|-|C|}$ 个元包含，仅在 $C=A$ 时，$2^{|A|-|C|}$ 是奇数.)

* 与△符合"分配律"，即对 X 的任意两个子集族 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$, 有

$$(\mathscr{A}\triangle\mathscr{B})^{*}=\mathscr{A}^{*}\triangle\mathscr{B}^{*}. \tag{6}$$

事实上，$C\in(\mathscr{A}\triangle\mathscr{B})^{*}\Leftrightarrow C$ 是 $\mathscr{A}\triangle\mathscr{B}$ 中奇数个元(X 的子集)

的子集$\Leftrightarrow C$是$\mathscr{A}$或$\mathscr{B}$之一的奇数个元的子集，但不同时是$\mathscr{A}$与$\mathscr{B}$中奇数个元的子集$\Leftrightarrow C \in \mathscr{A}^* \triangle \mathscr{B}^*$.

现在证明(1). 设$\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$，则由(3)，(4)，(5)，(6)易得

$$\begin{aligned}\mathscr{A}^* &= (\{A_1\}\triangle\{A_2\}\triangle\cdots\triangle\{A_k\})^* \\ &=(\{A_1\})^*\triangle(\{A_2\})^*\triangle\cdots\triangle(\{A_k\})^* \\ &=P(A_1)\triangle P(A_2)\triangle\cdots\triangle P(A_k),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathscr{A}^*)^* &= (P(A_1)\triangle P(A_2)\triangle\cdots\triangle P(A_k))^* \\ &=(P(A_1))^*\triangle(P(A_2))^*\triangle\cdots\triangle(P(A_k))^* \\ &=\{A_1\}\triangle\{A_2\}\triangle\cdots\triangle\{A_k\} \\ &=\{A_1, A_2, \cdots, A_k\} = \mathscr{A}.\end{aligned}$$

解法三(需知道矩阵的乘法.)　令$N = 2^n$. 设X的全部子集为$A_1, A_2, \cdots, A_N$. 考虑一个$N\times N$的矩阵(数表)F,矩阵F的第i行第j列的元素为a_{ij}，

$$a_{ij} = \begin{cases}1, & \text{若 } A_i \subseteq A_j; \\ 0, & \text{其他情况.}\end{cases}$$

对于X的每一个子集族$\mathscr{A}$,定义列向量$C(\mathscr{A}) = (c_1, c_2, \cdots, c_N)^T$，其中

$$c_i = \begin{cases}1, & \text{若 } A_i \in \mathscr{A}; \\ 0, & \text{其他情况.}\end{cases}$$

α^T表示向量α的转置，即

$$(c_1, c_2, \cdots, c_N)^T = \begin{pmatrix}c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N\end{pmatrix}.$$

由矩阵的乘法，

$$F \times C(\mathscr{A}) = (x_1, x_2, \cdots, x_N)^T,$$

其中 x_i 就是 $\mathscr{A}$ 中包含 A_i 的元数. 因此

$$F \times C(\mathscr{A}) \equiv C(\mathscr{A}^*) \pmod 2.$$

从而

$$F^2 \times C(\mathscr{A}) \equiv F \times C(\mathscr{A}^*) \equiv C((\mathscr{A}^*)^*) \pmod 2. \tag{7}$$

另一方面，$F^2 = (b_{ij})$，其中

$$b_{ij} = \sum_{k=1}^{N} a_{ik} a_{kj}.$$

显然，当且仅当 $a_{ik} = a_{kj} = 1$ 时，$a_{ik}a_{kj} = 1$. 即当且仅当 $A_i \subseteq A_k \subseteq A_j$ 时，$a_{ik}a_{kj} = 1$. 于是 b_{ij} 即满足 $A_i \subseteq A_k \subseteq A_j$ 的 A_k 的个数，从而

$$b_{ij} = \begin{cases} 2^{|A_j|-|A_i|}, & \text{若 } A_i \subseteq A_j; \\ 0, & \text{其他情况}. \end{cases}$$

$$\equiv \begin{cases} 1, & \text{若 } i = j; \\ 0, & \text{若 } i \neq j. \end{cases} \pmod 2$$

即 $A^2 \pmod 2$ 是恒等矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$.

由(7)得 $C(\mathscr{A}) = C((\mathscr{A}^*)^*)$，即 $\mathscr{A} = (\mathscr{A}^*)^*$.

三种证法各有千秋，值得细细品味. 其中特征函数、对称差、(0, 1)矩阵(元素为 0 或 1 的矩阵)都是有用的工具.

3.6 三元子集族(Ⅰ)

集 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的三元子集族，由 X 的全部或一些三元子集组成，在很多问题中出现. 大概是因为除了二元子集族，三元子集族最为简单，而性质又极丰富.

例 1 $n(\geqslant 4)$ 名学生组成 $n+1$ 个俱乐部，每个俱乐部 3 名学生，并且每两个俱乐部的成员不全相同. 证明必有两个俱乐部恰有一个公共成员.

解 每个俱乐部就是一个三元子集，问题即 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的 $n+1$ 个三元子集中，必有两个恰有一个公共元.

假设没有两个子集恰有一个公共元.

$n+1$ 个子集共有 $3(n+1)$ 个元，其中必有一个元出现的次数 $\geqslant\left\lceil\frac{3(n+1)}{n}\right\rceil=4$（$\lceil x\rceil$表示不小于实数 x 的最小整数，例如 $\lceil 3.14\rceil=4$. $\lceil x\rceil$称为天花板函数），即它至少属于 4 个子集.

设 i 至少属于 4 个子集，$\{i, j, k\}$是这样的一个集. 另一个含 i 的集必含 j 或 k，不妨设它为$\{i, j, l\}$.

若有一个含 i 的三元子集不含 j，则它必为$\{i, k, l\}$. 但这时第四个含 i 的三元子集不可能与$\{i, j, k\}$，$\{i, j, l\}$，$\{i, k, l\}$均有两个公共元素. 所以每个含 i 的三元子集必含 j. 由对称性，含 j 的三元子集也必含 i.

设 $n+1$ 个集中有 m 个含 i（从而也含 j），则这 m 个集（的并）共有 $m+2$ 个元素. 其余的 $n-m+1$ 个集与这 m 个集无公共元素（若有公共元素，则有两个公共元素. 从而这集含 i 或 j）. 于是由 $n-(m+2)=n-m-2$ 个元组成 $n-m+1$ 个三元子集.

用 $n-m-2$ 个元与 $n-m+1$ 个子集代替上面的 n 个元

与$n+1$个子集，进行同样的讨论. 依此类推，每次得出一些三元子集，个数大于并的元数. 但这一过程不能无限继续下去. 矛盾表明必有两个三元子集的交恰含一个元素.

又解 假设没有两个子集恰有一个公共元.

若子集A与B有公共元(从而它们有两个公共元)，则称A, B等价，记为$A\sim B$.

显然$A\sim B$, $B\sim C$时，$A\sim C$(A, B的两个公共元中至少有一个属于C). 于是，我们可以利用等价关系将这些子集分类. 同一类的子集互相等价，不同类的子集互不等价(因而没有公共元素).

由于子集数比元数多1，所以必有一个类中子集数比元数多.

设$\{i, j, k\}$与$\{i, j, l\}$是这个类中的两个子集. 若这类中第三个子集为$\{i, k, l\}$，则这类中只能再有一个集即$\{j, k, l\}$. 若这类中第三个子集为$\{i, j, s\}$，则其他的集也都含i, j. 前一种情况，子集数$\leqslant$元数4. 后一种情况，子集数比元数少2. 均导致矛盾.

例2 求所有的自然数数对(m, n)，使得集$X=\{1, 2, \cdots, n\}$有m个三元子集$A_1, A_2, \cdots, A_m$满足：

(i) X的每一对元素(即二元子集)恰含在一个A_i $(1\leqslant i\leqslant m)$中；

(ii) $A_1, A_2, \cdots, A_m$中每两个恰有一个公共元.

解 设$A_1=\{1, 2, 3\}$. $n=3$, $m=1$是一个解. 若$n>3$，则有含1与第四个元4的集$A_2=\{1, 4, 5\}$. 由(i)，5与1, 2, 3, 4均不同.

又有$A_3=\{2, 4, 6\}$, $A_4=\{3, 4, 7\}$，6, 7与以前的元素不同.

$A_5 = \{1, 6, j\}$. 由(i)，$j \neq 1, 2, 3, 4, 5, 6$. 而由(ii)，$A_5 \cap A_4 \neq \varnothing$，所以 $j = 7$.

若有第 8 个元素 8，则由(i)有 $A_6 = \{1, 8, t\}$，其中 $t \neq 2, 3, 4, 5, 6, 7$. 从而 $A_6 \cap A_4 = \varnothing$，与(ii)矛盾. 所以 $n = 7$. 此时除上面的 $A_1, A_2, \cdots, A_5$ 外，还有 $A_6 = \{3, 5, 6\}$，$A_7 = \{2, 5, 7\}$. 于是 $m = 7$.

$(m, n) = (1, 3), (7, 7)$ 满足本题要求.

又解 每个 A_i 中有三个二元子集，所以

$$mC_3^2 = C_n^2. \tag{1}$$

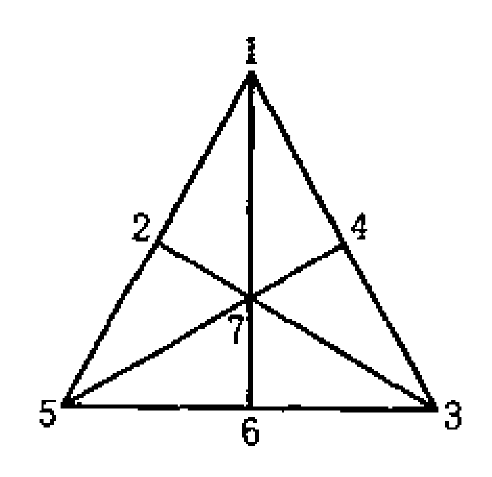
每个含元素 j 的 A_i 中，有两个含 j 的二元子集. X 中含 j 的二元子集共 $n-1$ 个. 由(i)，它们均恰属一个 A_i，所以有 $\frac{n-1}{2}$ 个 A_i 含 j.

将 A_i 作为点，每两点之间连一条边. 这样就得到一个图，它有 C_m^2 条边. 由(ii)，A_i 与 A_t 之间连的边可标上 A_i 与 A_t 的唯一的公共元素 j. 标 j 的边恰出现 $C_{\frac{n-1}{2}}^2$ 次. 于是

$$C_m^2 = nC_{\frac{n-1}{2}}^2. \tag{2}$$

由(1)，(2)不难解得 $(m, n) = (1, 3), (7, 7)$.

注：例 2 中 $(m, n) = (7, 7)$ 的情况就是组合学中著名的"有限射影平面". 如果将三元子集作为"直线"，那么它可以用下图表示：



但第七条“直线”$\{2, 4, 6\}$无法在欧氏平面上画成真正的直线，颇有点遗憾.

3.7 三元子集族(Ⅱ)

本节再举一些有关三元子集族的问题.

例 1 已知$\mathscr{A}$是$X=\{1, 2, \cdots, n\}$的一个三元子集族，$\mathscr{A}$中每两个元(子集)至多有一个公共元. 证明X有一个$[\sqrt{2n}]$元子集，它不包含$\mathscr{A}$中任何元(三元子集).

解 考虑X的不包含$\mathscr{A}$中任何元的子集. 这种子集一定存在，例如X的任一二元子集均是这种子集. 在这种子集中，取一个元数最多的，设它为集M. 我们只需证明M的元数m满足

$$m \geqslant [\sqrt{2n}]. \tag{1}$$

对X中每个$i \notin M$，由M的最大性，$\mathscr{A}$中必有一个元$A_i \subseteq M \cup \{i\}$.

因为A_i不包含在M中，所以$i \in A_i$. 设

$$A_i = \{i\} \cup B_i,$$

其中B_i是二元集，并且$B_i \subseteq M$.

因为$\mathscr{A}$中的每两个元A_i、A_j至多一个公共元素，所以在$i \neq j$时，$B_i \neq B_j$. 从而

$$i \longmapsto B_i$$

是从$X-M$到M的二元子集族的单射. 因此

$$n-m \leqslant C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2}.$$

从而

$$m^2+m-2n\geqslant 0,$$

$$m\geqslant\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}>\sqrt{2n}-1,$$

即(1)成立.

例 2 设例 1 中,$\mathscr{A}$的元数的最大值为 $f(n)$. 证明:

$$\frac{1}{6}(n^2-4n)\leqslant f(n)\leqslant\frac{1}{6}(n^2-n). \tag{2}$$

解 先估计 $f(n)$的上界,即证明(2)式右边的不等式.

每个三元子集$\{i, j, k\}$含有三个二元子集$\{i, j\}$, $\{j, k\}$, $\{i, k\}$.

由于$\mathscr{A}$中每两个元(X 的三元子集)至多有一个公共元,所以$\mathscr{A}$中每两个三元子集含有的二元子集均不相同.

X 的二元子集共 C_n^2 个,所以

$$3f(n)\leqslant C_n^2,$$

即

$$f(n)\leqslant\frac{1}{3}C_n^2=\frac{n^2-n}{6}.$$

估计 $f(n)$的下界应当用构造法. 造出一批三元子集,个数$\geqslant\frac{1}{6}n(n-4)$, 每两个的交至多含一个元素.

为此,考虑所有满足条件

$$i+j+k\equiv 0 \pmod n \tag{3}$$

(即 $i+j+k$ 被 n 整除)的三元子集$\{i, j, k\}$.

如果有 $i'=i$, $j'=j$, 并且

$$i'+j'+k'\equiv i+j+k\equiv 0 \pmod n,$$

那么

$$k' \equiv k \pmod{n}. \tag{4}$$

当 $k', k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 时,(4)式就是 $k' = k$. 所以满足(3)的每两个(不同的)三元子集至多有一个公共元素.

现在来计算满足(3)的三元子集 $\{i, j, k\}$ 的个数 s.

首先取 i,取法有 n 种. i 取定后再取 j, $j \neq i$, 并且不满足同余方程

$$2i + j \equiv 0 \pmod{n}$$

(即当 $2i < n$ 时, $j \neq n - 2i$; 当 $2i \geqslant n$ 时, $j \neq 2n - 2i$)及

$$i + 2j \equiv 0 \pmod{n}$$

$\left(\text{即 } j \neq \dfrac{n-i}{2}, j \neq \dfrac{2n-i}{2}\right)$. 因此 j 至少有 $n-4$ 种选择. i, j 确定后,由(3), k 也随之确定,而且与 i, j 均不相同. 所以 $s \geqslant \dfrac{1}{6}n(n-4)$. 从而(2)的另一半成立.

例 3 设 $\mathscr{A}$ 是 $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个三元子集族, $n = 6k$. 若 X 的每个二元子集均至少包含在 $\mathscr{A}$ 的一个元(X 的三元子集)中,证明 $\mathscr{A}$ 至少有 $\dfrac{n^2}{6}$ 个元.

解 含有 1 的二元子集有 $n-1$ 个. 每个含 1 的三元子集包含两个含 1 的二元子集. 因此,至少有 $\left\lceil \dfrac{n-1}{2} \right\rceil = 3k$ 个含 1 的三元子集,才能使含 1 的二元子集都至少被 1 个三元子集包含.

对含 2, 3, $\cdots$, n 的二元子集作同样的讨论. 因为每个三元子集含 3 个元,所以 $\mathscr{A}$ 中至少有

$$\frac{3k\times n}{3}=\frac{n^2}{6}$$

个元(X 的三元子集).

另一方面,可以造出$\frac{n^2}{6}$个三元子集,使得 X 的每个二元子集均至少包含在一个三元子集中,但构造较为复杂,留在 3.9 节中详细说明.

因此 $\mathscr{A}$ 至少含$\frac{n^2}{6}$个元.

例 4 设 $l=\frac{n^2}{6}$, $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_l\}$ 是例 3 中所说的三元子集族,X 的每一个二元子集至少包含在一个 A_j $(1\leqslant j\leqslant l)$ 中.证明 X 可以拆成 $3k$ 个两两无公共元的二元子集 $P_1, P_2, \cdots, P_{3k}$,每一个 P_i 恰包含在两个 A_j 中,而 X 的其他二元子集恰含于一个 A_j 中.

解 因为 $l=\frac{n^2}{6}$,所以由例 3 的推导可知含有元 i 的三元子集 A_j 恰好 $\frac{n}{2}(=3k)$ 个.

每个含 i 的三元子集包含两个含 i 的二元子集,$\frac{n}{2}$个 A_j 共包含 n 个含 i 的二元子集.含 i 的不同的二元子集共 $n-1$ 个,每一个均至少在一个 A_j 中出现,所以恰有一个含 i 的二元子集在诸 A_j 中共出现两次.

设$\{i, t\}$出现两次.同样,含 t 的二元子集中恰有一个被两个 A_j 包含,而且这个子集就是$\{i, t\}$.于是,X 的元素两两配对,共得 $3k$ 个二元子集 $P_1, P_2, \cdots, P_{3k}$.每个 P_s(例如$\{i, t\}$)恰含于两个 A_j 中,而 X 的其他二元子集均含于一个

A_i 中.

3.8 Steiner 三连系

如果 $\mathscr{A}$ 是集 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个三元子集族，使得 X 的每个二元子集都恰好是 $\mathscr{A}$ 中一个元的子集，那么 $\mathscr{A}$ 就称一个 n 阶 Steiner 三连系.

下面分别列举了阶数是 3，7，9 的 Steiner 三连系：

$n=3$, $\{1, 2, 3\}$;

$n=7$, $\{1, 2, 4\}$, $\{2, 3, 5\}$, $\{3, 4, 6\}$, $\{4, 5, 7\}$,

$\{5, 6, 1\}$, $\{6, 7, 2\}$, $\{7, 1, 3\}$;

$n=9$, $\{1, 2, 3\}$, $\{4, 5, 6\}$, $\{7, 8, 9\}$,

$\{1, 4, 7\}$, $\{2, 5, 8\}$, $\{3, 6, 9\}$,

$\{1, 5, 9\}$, $\{2, 6, 7\}$, $\{3, 4, 8\}$,

$\{1, 6, 8\}$, $\{2, 4, 9\}$, $\{3, 5, 7\}$.

其中 7 阶 Steiner 三连系实际上就是 3.6 节例 2 所说的二阶射影平面，只是记号有所不同. 如果将这里的 4，3，6，7 分别改成 3，7，4，6，那么结果就完全一样. 其实 3.6 节例 2 中的图，顶点可任意地标记 1～7，所得的三连系都是同构的.

例 1 证明 Steiner 三连系存在时，

$$n \equiv 1 \text{ 或 } 3 \pmod 6. \tag{1}$$

解 设 $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_b\}$ 的元数为 b. 考虑 X 的 C_n^2 个二元子集. 每个二元子集恰在 $A_1, A_2, \cdots, A_b$ 的一个中出现，共出现 C_n^2 次.

另一方面，每个 A_j 包含 3 个二元子集，$A_1, A_2, \cdots, A_b$ 共包含 $3b$ 个二元子集. 所以

$$3b = C_n^2,$$

即

$$b = \frac{n(n-1)}{6}. \tag{2}$$

由于 b 是整数，从(2)得到

$$n \equiv 1,\ 3,\ 4,\ 6 \pmod 6. \tag{3}$$

再考虑 X 中含 1 的二元子集. 显然这样的子集共 $n-1$ 个. 若 $A_1, A_2, \cdots, A_b$ 中有 r 个含 1，则由于含 1 的 A_i 包含两个含 1 的二元子集，每个二元子集恰在 $A_1, A_2, \cdots, A_b$ 的一个中出现，所以

$$2r = n-1,$$

即

$$r = \frac{n-1}{2}. \tag{4}$$

(4) 表明 n 是奇数，结合(3)即得(1).

条件(1)也是充分的. Steiner 曾于 1853 年提出这一问题，1859 年为 Reiss 解决. 其实在他们之前，Kirkman 已于 1847 年提出并解决了这个问题. 证法很多，限于篇幅，这里不作介绍.

例 2 如果有 n_1 阶和 n_2 阶的 Steiner 三连系 $\mathscr{A}_1$ 和 $\mathscr{A}_2$，那么就有 n_1n_2 阶 Steiner 三连系.

解 设 $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ 分别为 $X_1 = \{a_1, a_2, \cdots, a_{n_1}\}$, $X_2 = \{b_1, b_2, \cdots, b_{n_2}\}$ 的三元子集族. 作 n_1n_2 元集

$$X_3 = \{a_ib_j \mid 1 \leqslant i \leqslant n_1,\ 1 \leqslant j \leqslant n_2\}.$$

再作 X_3 的三元子集族 $\mathscr{A}_3$ 如下：

$$\{a_ib_r,\ a_jb_s,\ a_kb_t\} \in \mathscr{A}_3,$$

当且仅当

(i) $r = s = t$, $\{a_i, a_j, a_k\} \in \mathscr{A}_1$;

(ii) $i = j = k$, $\{b_r, b_s, b_t\} \in \mathscr{A}_2$;

(iii) $\{a_i, a_j, a_k\} \in \mathscr{A}_1$, $\{b_r, b_s, b_t\} \in \mathscr{A}_2$

之一成立.

现在证明 $\mathscr{A}_3$ 是 X_3 的 Steiner 三连系.

设 $\{a_ib_r, a_jb_s\}$ 是 X_3 的一个二元子集. 若 $i = j$，则因为 $\{b_r, b_s\}$恰被 $\mathscr{A}_2$ 的一个元$\{b_r, b_s, b_t\}$包含，所以$\{a_ib_r, a_jb_s\}$恰被 $\mathscr{A}_3$ 中一个元$\{a_ib_r, a_ib_s, a_ib_t\}$包含. 若 $r = s$，情况同上. 若 $i \neq j$, $r \neq s$，则$\{a_i, a_j\}$恰被 $\mathscr{A}_1$ 中一个元$\{a_i, a_j, a_k\}$包含，$\{b_r, b_s\}$恰被 $\mathscr{A}_2$ 中一个元$\{b_r, b_s, b_t\}$包含. 所以$\{a_ib_r, a_jb_s\}$恰被 $\mathscr{A}_3$ 中一个元$\{a_ib_r, a_jb_s, a_kb_t\}$包含.

下面是 Kirkman 的女生问题，非常著名.

例 3 十五名女生，每天分成五组，每组三人，外出散步. 问能否在一周的七次散步中，每两名女生恰有一次在同一组?

解 下面给出一种排法：

一：{1, 2, 5}, {3, 14, 15}, {4, 6, 12}, {7, 8, 11}, {9, 10, 13};

二：{1, 3, 9}, {2, 8, 15}, {4, 11, 13}, {5, 12, 14}, {6, 7, 10};

三：{1, 4, 15}, {2, 9, 11}, {3, 10, 12}, {5, 7, 13}, {6, 8, 14};

四：{1, 6, 11}, {2, 7, 12}, {3, 8, 13}, {4, 9, 14}, {5, 10, 15};

五：{1，8，10}，{2，13，14}，{3，4，7}，{5，6，9}，
{11，12，15}；

六：{1，7，14}，{2，4，10}，{3，5，11}，{6，13，15}，
{8，9，12}；

日：{1，12，13}，{2，3，6}，{4，5，8}，{7，9，15}，
{10，11，14}.

一个阶数 $6k+3$ 的 Steiner 三连系，如果它的 $b=(2k+1)(3k+1)$ 个元可以分成 $3k+1$ 组，每组含 $2k+1$ 个元，并且原来集合的 $6k+3$ 个元，在每一组的 $2k+1$ 个三元子集中恰好各出现一次，那么这个三连系就称为 Kirkman 三连系．十五个女生问题就是构造一个 $k=2$ 的 Kirkman 三连系.

Steiner 三连系等是区组设计中的课题，原先只是娱乐的数学，现在发现在科学试验的设计方法中有重要作用.

一个 n 元集 X，可以有很多个 Steiner 三连系．由于 n 元集有 C_n^3 个三元子集，每个 Steiner 三连系有 $b=\frac{n(n-1)}{6}$ 个元（X 的三元子集），所以 X 至多有

$$\frac{C_n^3}{b}=n-2$$

个两两无公共元的 Steiner 三连系．如果恰有 $n-2$ 个两两无公共元的 Steiner 三连系，那么就称这 $n-2$ 个 Steiner 三连系为一个大集．一百三十多年来许多数学家研究过大集的存在问题，直至 1983 与 1984 年，我国数学家陆家羲在连续的六篇论文中证明了对于

$$n>7,\ n\equiv 1,\ 3 \pmod 6$$

的 n 值，除六个可能的例外值，都有大集存在．从而基本上解

决了这一问题. 对六个例外值，陆家羲已有腹稿，但因心脏病猝然去世，未能完成.

3.9 构 造

很多组合问题，也就是集合与元素的配置问题，需要构造出符合要求的实例（如上节的女生问题）. 这一节我们举几个构造的例题.

例 1 $2n$ 个学生每天出去散步，每两人一组. 如果每一对学生至多在一起散步一次. 这样的散步可以持续多少天?

解 因为每个人有 $2n-1$ 个同学，所以散步至多持续 $2n-1$ 天. 我们证明只要适当安排，确实可以持续散步 $2n-1$ 天.

为此作图，用 $0, 1, \cdots, 2n-1$ 表示 $2n$ 个学生，第一次散步用线表示，即图中的

$$\{0, 1\}, \{2, 2n-1\}, \{3, 2n-2\}, \cdots, \{n, n+1\}.$$

然后绕 O 旋转，每次转过的角度为 $\frac{2\pi}{2n-1}$，这样就得到了 $2n-1$ 次散步的安排（例如第 2 次散步为 $\{0, 2\}$, $\{1, 3\}$, $\{2n-1, 4\}$, $\cdots$, $\{n+2, n+1\}$）.

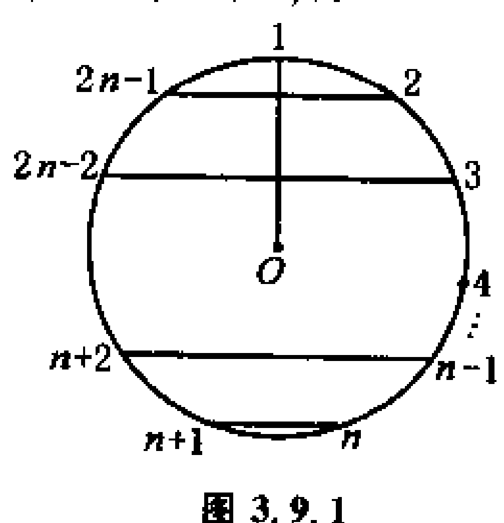


图 3.9.1

n 个点，每两点之间连一条边，所得的图称为完全图 K_n. 例 1 表明完全图 K_{2n} 的 C_{2n}^2 条边可以分 $2n-1$ 组，每组 n 条，而且这 n 条两两无公共(端)点. 这样的一组边称为图的一个 1—因子(1 意指每个点只引出一条边，即每个元只属于一个二元子集)或一个完全匹配.

现在我们来完成 3.7 节例 3 的剩余部分.

例 2 设 $n=6k$，试构造 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个三元子集族 $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_l\}$，$l=\frac{n^2}{6}$，使得 X 的每个二元子集均至少包含在 $\mathscr{A}$ 的一个元中.

解 将 X 用 n 个点 $1, 2, \cdots, n$ 表示，形成一个完全图 K_n，每个二元子集是 K_n 的一条边.

问题即在这图中找 $\frac{n^2}{6}$ 个三角形，"吸收"所有的边(线).

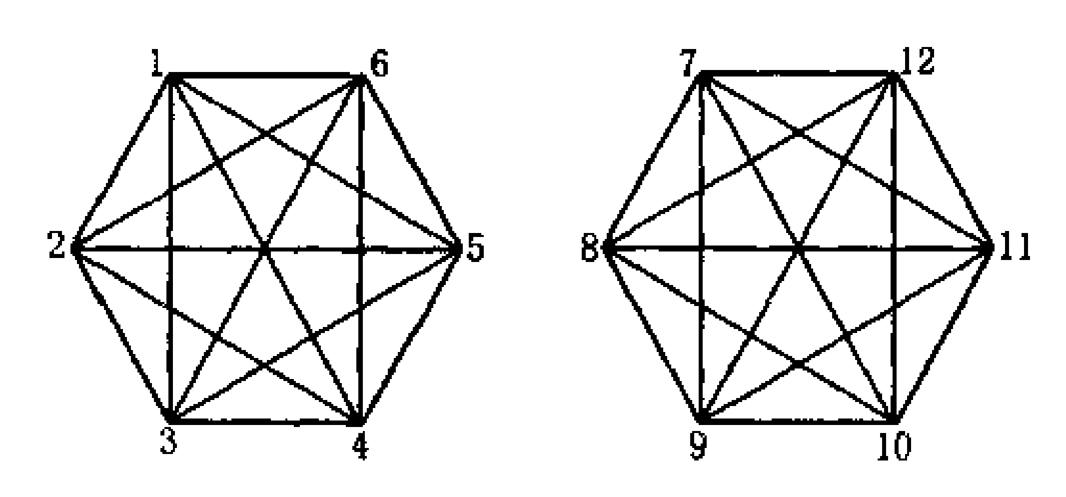


图 3.9.2

$n=6(k=1)$ 的情况很简单：三角形(即三元子集)

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{3, 4, 5\},$$

$$\{3, 4, 6\}, \{5, 6, 1\}, \{5, 6, 2\},$$

即为所求(参见图 3.9.2 左半边).

其中 $\frac{n}{2}(=3)$ 条边$\{1, 2\}$，$\{3, 4\}$，$\{5, 6\}$出现两次，其他的边恰出现一次. 这在 3.7 节例 4 中已经说过. 以下各种情况也均如此.

$n=12$ 时，首先注意图 3.9.2 右半边，根据例 1，可以分成 5 个 1—因子(下面简称为因子)，每一个由三对无公共点的边(线)组成. 将其中一个因子重复一次，共得 6 个因子. 图 3.9.2 左半边的 6 个顶点各与一个因子搭配，一个顶点与一个因子形成 3 个三角形，共得 18 个三角形. 图 3.9.2 左半边的 K_6，根据上一段，可分成 6 个三角形(其中三条边出现两次). 这样形成的 24 个三角形即为所求.

$n=18$ 时，考虑Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ三个 K_6. Ⅱ，Ⅲ两个 K_6 之间有 $6\times6=36$ 条边，可以分为 6 组(设 b_i, c_i, $i=1, 2, \cdots, 6$, 分别为Ⅱ，Ⅲ的顶点，则第 j 组是 $\{b_1c_{1+j}, b_2c_{2+j}, \cdots, b_6c_{6+j}\}$，$j=0, 1, 2, 3, 4, 5$，并约定 $c_{k+6}=c_k$)，每一组与Ⅰ的一个顶点配合得到 36 个三角形. 又根据上面所证，Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ均可分成 6 个三角形(各有 3 条边出现两次). 这些三角形满足要求.

假设对于 $n=6h<6k$，均可分成合乎要求的三角形. 考虑 $n=6k$.

若 $k=4m$，考虑两个 K_{12m}：Ⅰ与Ⅱ. 根据归纳假设，Ⅰ可以分成三角形满足要求. 如果将Ⅱ看成 K_{2m}(每个顶点是一个 K_6)，那么它有 $2m-1$ 个因子，每个因子由 m 条边组成，每条边就是上面 $n=18$ 时，Ⅱ，Ⅲ两个 K_6 之间的 36 条边. Ⅰ也可以看成 K_{2m}(每个顶点是一个 K_6)，将它的 $2m-1$ 个顶点与上述 $2m-1$ 个因子搭配成 $2m-1$ 组，多余一个顶点. 每一组与上面 $n=18$ 时，Ⅰ与Ⅱ，Ⅲ之间的边搭配的情况类似，共得

$m\times 36$ 个三角形. Ⅰ中多余一个顶点即一个 K_6，将它与Ⅱ中 $2m$ 个 K_6 的每一个搭配，搭配情况如 $n=12$ 的情况（Ⅰ中的 K_6 在图 3.9.2 的左边，它不必再分成三角形，因为作为Ⅰ的一部分，业已用归纳假设分妥）. 整个图形共分成

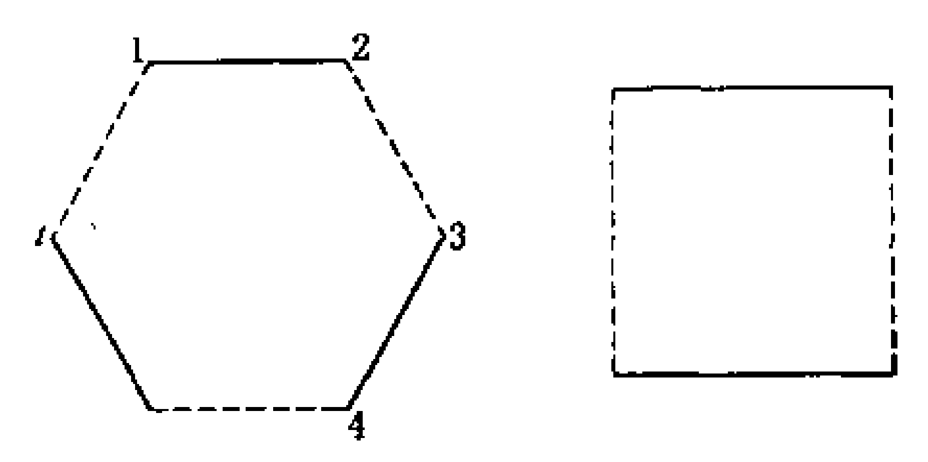
$$\frac{(6\times 2m)^2}{6}+(2m-1)\times m\times 36+2m\times 18=\frac{n^2}{6}$$

个三角形，合乎要求.

若 $n=6(4m+2)$，考虑Ⅰ，Ⅱ两个图，Ⅰ是 K_{12m}，Ⅱ是 $K_{6(2m+2)}$. 根据归纳假设，Ⅰ可分成三角形满足要求. 将Ⅱ看成 K_{2m+2}（每个顶点是一个 K_6），它有 $2m+1$ 个因子. Ⅰ也可以看成 K_{2m}，将它的顶点与上述因子搭配，多余一个因子. 搭配成的每一组可分成三角形. 多出的一个因子即 $2m$ 个 K_6，两两搭配. 每一对 K_6 搭配情况和上面 $n=12$ 相同.

若 $n=6(4m+3)$，考虑Ⅰ，Ⅱ两个图，Ⅰ是 $K_{6(2m+1)}$，Ⅱ是 $K_{6(2m+2)}$. Ⅰ用归纳假设分成三角形. Ⅱ可看成 K_{2m+2}，有 $2m+1$ 个因子，每一个与Ⅰ的一个顶点搭配. K_{2m+2}（即Ⅱ）的每个顶点是 K_6，每一个均分成 6 个三角形（按 $n=6$ 时的做法）.

若 $n=6(4m+1)$，考虑Ⅰ，Ⅱ两个图，Ⅰ是 $K_{6(2m-1)}$，Ⅱ是 $K_{6(2m+2)}$. Ⅰ用归纳法完成分解. Ⅱ看成 K_{2m+2}，它的因子与Ⅰ搭配后多出两个因子. 每个因子有 m 条边无公共端点，第一个因子的边 $\{1, 2\}$ 的两端各有一条属于第二个因子的边，不妨设一条为 $\{2, 3\}$. 3 又接上第一个因子的边 $\{3, 4\}$，……，依此类推. 因为边共 $2m$ 条，所以上述过程不能无限继续下去，必然形成圈. 圈上的边交错地属于两个因子（如图 3.9.3），因而圈为偶圈（即圈上的边数为偶数）. 因为每个点在



第一因子的边为实线，第二因子的边为虚线.

图 3.9.3

一个因子中恰出现一次，所以圈上的点不与圈外的点相连. 对圈外的点进行同样讨论. 我们得出：两个因子组成若干个偶圈.

每个偶圈的顶点都是 K_6. 对于图 3.9.3 中的第一个圈，按照 $n=12$ 的情况可以将 1, 2 间的连线及 2 分成三角形(作为图 3.9.2 左边 K_6 的 1 暂时不动). 同样处理 2 与 3，……，最后处理 t 与 1. 这样每个 K_6 及每两个相邻的 K_6 间连线已被分成三角形. 其他的偶图亦照此办理.

于是对一切 $n=6k$ 均可构造出合乎要求的三元子集族 $\mathscr{A}$.

注：上面的构造借助了归纳法，可称为归纳构造. 在构造复杂图形(子集族)时经常采用.

3.10 分　　拆(Ⅰ)

如果集合 $X=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k$，并且集合 A_1，A_2，…，A_k 中每两个的交都是空集，那么 A_1，A_2，…，A_k 称为 X 的一个分拆.

例1 设 $A_1, A_2, \cdots, A_m$; $B_1, B_2, \cdots, B_m$; $C_1, C_2, \cdots, C_m$ 是集合 X 的三个分拆.若对每组 i, j, k,均有

$$|A_i \cap B_j| + |A_i \cap C_k| + |B_j \cap C_k| \geqslant m, \tag{1}$$

证明 X 的元数 $n \geqslant \frac{m^3}{3}$,并且在 m 被 3 整除时,元数 $n = \frac{m^3}{3}$ 的集 X 有三个分拆满足题述条件.

解 在(1)左边用 $i = 1, 2, \cdots, m$ 代入然后求和,得

$$|B_j| + |C_k| + m|B_j \cap C_k| \geqslant m^2. \tag{2}$$

(因为 $|A_1 \cap B_j| + |A_2 \cap B_j| + \cdots + |A_m \cap B_j| = |(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m) \cap B_j| = |X \cap B_j| = |B_j|$.)

同样,在(2)的左边用 $j = 1, 2, \cdots, m$ 代入并求和,得

$$n + m|C_k| + m|C_k| \geqslant m^3. \tag{3}$$

最后,在(3)的左边用 $k = 1, 2, \cdots, m$ 代入并求和,得

$$mn + mn + mn \geqslant m^4, \tag{4}$$

即

$$n \geqslant \frac{m^3}{3}. \tag{5}$$

若 $m = 3s$,考虑 m^2 个集 $M_{11}, M_{12}, \cdots, M_{mm}$,每个集 s 个元,并且两两不相交(例如 M_{11} 是$\{1, 2, \cdots, s\}$,M_{12} 是 $\{s+1, s+2, \cdots, 2s\}$, $\cdots$, M_{mm} 是 $\{9s^3 - s + 1, 9s^3 - s + 2, \cdots, 9s^3\}$ 即可).

表 X 为集合

$$\begin{aligned} &M_{11}, M_{12}, \cdots, M_{1m}; \\ &M_{21}, M_{22}, \cdots, M_{2m}; \\ &\cdots\cdots \end{aligned} \tag{6}$$

$$M_{m1},\ M_{m2},\ \cdots,\ M_{mm}.$$

的并. 又令

$$A_i = \bigcup_{j=1}^{m} M_{ij} \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m),$$

$$B_j = \bigcup_{i=1}^{m} M_{ij} \quad (j = 1,\ 2,\ \cdots,\ m),$$

$$C_k = \bigcup_{j=1}^{m} M_{j,\,k+j-1} \quad (k = 1,\ 2,\ \cdots,\ m,$$

$$\text{约定 } M_{j,\,m+t} = M_{jt}).$$

则显然有 $A_1, A_2, \cdots, A_m$; $B_1, B_2, \cdots, B_m$; $C_1, C_2, \cdots, C_m$ 都是 X 的分拆.

注意 A_i 是对(6)中第 i 行的集合求并, B_j 是对(6)中第 j 列的集合求并,所以

$$|A_i \cap B_j| = |M_{ij}| = \frac{m}{3}.$$

同样, C_k 是对(6)中一条对角线(不同行不同列)的集合求并(如果将(6)在右面重写一遍,那么 C_k 就是从左上到右下的第 k 条对角线的集合的并),所以

$$|A_i \cap C_k| = \frac{m}{3}, \quad |B_j \cap C_k| = \frac{m}{3}.$$

下面两个问题涉及分拆的个数与分拆的链的个数.

例 2 若 n 元集 X 的分拆 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 中有 k_1 个一元集, k_2 个二元集, ……, k_n 个 n 元集 ($k_1+k_2+\cdots+k_n=m$, $1k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n$, $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 都是非负整数),则称这个分拆为形如 $1^{k_1}\cdot 2^{k_2}\cdot\cdots\cdot n^{k_n}$ 的分拆. 求这种分拆的个数.

解 每一个形如 $1^{k_1}\cdot 2^{k_2}\cdot\cdots\cdot n^{k_n}$ 的分拆,可以将它们的元素依下法排列:

先排一元集的元素(有 $k_1!$ 种排法),再排二元集的元

素，各集的顺序有 $k_2!$ 种，每个集的元素有两种排法，共有 $(2!)^{k_2}\cdot k_2!$ 种排法. 依此类推，k_j 个 j 元集有 $(j!)^{k_j}\cdot k_j!$ 种排法. 共产生 $1^{k_1}\cdot k_1!\cdot 2^{k_2}\cdot k_2!\cdot\cdots\cdot(n!)^{k_n}\cdot k_n!$ 个排列.

每两个不同的形如 $1^{k_1}\cdot 2^{k_2}\cdot\cdots\cdot n^{k_n}$ 的分拆，至少有一个不同的集，因此用上法产生的排列互不相同.

另一方面，对 n 个元的任一排列，前 k_1 个元产生 k_1 个一元集，它们后面的 $2k_2$ 个元产生 k_2 个二元集（每连续二个元组成一个集），依此类推，得出一个形如 $1^{k_1}\cdot 2^{k_2}\cdot\cdots\cdot n^{k_n}$ 的分拆，所给排列正是这个分拆用上法产生的排列.

这样，用上法恰好产生全部 $n!$ 个排列，既无重复也无遗漏，所以 $1^{k_1}\cdot 2^{k_2}\cdot\cdots\cdot n^{k_n}$ 形的分拆共 $\dfrac{n!}{1^{k_1}\cdot k_1!\cdot 2^{k_2}\cdot k_2!\cdot\cdots\cdot(n!)^{k_n}\cdot k_n!}$ 个.

例 3 设 $P_m=\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ 是 n 元集 X 的一个分拆（即 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是 X 的分拆）. 将其中某个 A_i 再拆为两个集，这就产生 X 的一个分拆 P_{m+1}，它由 $m+1$ 个集组成. P_{m+1} 称为 P_m 的加细. 若

$$P_1, P_2, \cdots, P_n \tag{7}$$

都是 n 元集 X 的分拆，并且每一个是前一个的加细（显然这时 P_n 由 n 个集组成，而 P_1 仅由一个集即 X 组成），则称(7)为长为 n 的链. 求长为 n 的链的个数.

解 由 X 逐步加细可以产生长为 n 的链(7). 这一过程也可以反过来：由 n 个一元集组成的分拆 P_n 出发，将其中两个集合并得到 P_{n-1}，再将 P_{n-1} 中两个集合并起来得到 P_{n-2}，…… 一般地，设已有 $P_n, P_{n-1}, \cdots, P_{k+1}$. 将 P_{k+1} 任两个集合并起来得到 P_k. 由于 P_{k+1} 由 $k+1$ 个集组成，所以 P_k 有

C_{k+1}^2 种. 从而长为 n 的链共

$$\prod_{k=1}^{n-1} C_{k+1}^2 = \frac{n!(n-1)!}{2^{n-1}}$$

种.

3.11 分　　拆(Ⅱ)

上节关于分拆的问题,均与 n 元集 X 的元素无关(仅与元数有关). 本节的问题与元素密切相关. 我们限定 $X = \{1, 2, \cdots, n\}$.

例 1　设 A, B, C 为 X 的一个分拆,并且从 A, B, C 中各取一个数时,最大的不等于另两个的和. 证明

$$|A| = |B| = |C| \tag{1}$$

不成立.

解　不妨设 $1 \in A$, $B \cup C$ 中的最小数 $b \in B$. 设 C 中的数为

$$c_1 < c_2 < \cdots < c_k. \tag{2}$$

若有 $c_{i+1} - c_i = 1$, 不妨设 i 是满足这一条件的最小下标,考虑 $c_i - b$ 与 $c_i - b + 1$ 的归属.

因为 $b \in B$, 而

$$(c_i - b) + b = c_i,$$

$$(c_i - b + 1) + b = c_{i+1},$$

所以 $c_i - b$, $c_i - b + 1$ 均不属于 A.

又 $(c_i - b) + 1 = c_i - b + 1$, 所以 $c_i - b$ 与 $c_i - b + 1$ 不能分别属于 B, C. 由 i 的最小性,差为 1 的 $c_i - b$ 与 $c_i - b + 1$

不能同属于 C,因此 c_i-b 与 c_i-b+1 只能同属于 B. 但比 b 更小的 $b-1\in A$, $(b-1)+(c_i-b+1)=c_i\in C$, 与已知矛盾.

因此恒有 $c_{i+1}-c_i\geqslant 2\quad(i=1,2,\cdots,k-1)$.

这时 $c_i-1\notin B$(因为 $1+(c_i-1)=c_i$), 所以 $c_i-1\in A$, $A\supseteq\{1,c_1-1,c_2-1,\cdots,c_k-1\}$, 从而

$$|A|\geqslant|C|+1>|C|,$$

即(1)不成立.

(1) 表明 $\min(|A|,|B|,|C|)<\frac{n}{3}$. 更精确的结果是下面的(3).

例 2 条件同例 1. 证明:

$$\min(|A|,|B|,|C|)\leqslant\frac{n}{4}. \tag{3}$$

解 例 1 中已经证明恒有

$$c_{i+1}-c_i\geqslant 2\quad(i=1,2,\cdots,k-1).$$

若所有 $c_{i+1}-c_i\geqslant 3$, 则

$$c_1-1,c_2-1,\cdots,c_k-1,c_1+1,c_2+1,\cdots,c_k+1$$

均不在 C 中,也均不在 B 中(因为 $1+(c_i-1)=c_i$, $1+c_i=c_i+1$, $1\in A$, $c_i\in C$). 因此上述 $2k$ 个数及 1 均在 A 中, $|A|>2k$. 若 $|B|\geqslant k$, 则 $|C|=k\leqslant\frac{n}{4}$. 若 $|B|<k$, 则 $|B|<\frac{n}{4}$. (3)成立.

以下设有 $c_{i+1}-c_i=2$ 且 i 是满足这一条件的最小下标.

若 $b\geqslant 3$, 则 $2,b-2\in A$. 考虑 c_i-b 与 c_i-b+2. 因为

$$(c_i - b) + b = c_i,$$

$$(c_i - b + 2) + b = c_{i+1},$$

所以 $c_i - b$, $c_i - b + 2$ 均不属于 A.

又 $(c_i - b) + 2 = c_i - b + 2$, $2 \in A$, 所以 $c_i - b$ 与 $c_i - b + 2$ 不能分别属于 B, C. 由 i 的最小性, $c_i - b$ 与 $c_i - b + 2$ 只能同属于 B. 但 $(b - 2) + (c_i - b + 2) = c_i$, 矛盾.

因此 $b = 2$. 我们先证明 $< c_i$ 的奇数 t 及 $c_i - t$ 均在 A 中.

$t = 1$ 是显然的. 设对 t 结论成立, $t + 2 < c_i$. 因为 $t \in A$, $2 \in B$, 所以 $t + 2 \notin C$. 因为 $c_i - t \in A$, $(c_i - t) + (t + 2) = c_{i+1} \in C$, 所以 $t + 2 \notin B$. 从而 $t + 2 \in A$. 因为 $(c_i - (t + 2)) + (t + 2) = c_i \in C$, 所以 $c_i - (t + 2) \notin B$. 又 $(c_i - (t + 2)) + 2 = c_i - t \in A$, 所以 $c_i - (t + 2) \notin C$. 从而 $c_i - (t + 2) \in A$. 于是上述断言成立.

若 c_i 是奇数, 则根据上面所证 $c_i - 2 \in A$. 但 $(c_i - 2) + 2 = c_i \in C$, 矛盾. 所以 c_i 是偶数.

我们再证明大于 c_i(不超过 n)的奇数 $c_i + t$ 均在 A 中.

$t = 1$ 显然. 设 $c_i + t \in A$, $c_i + t + 2 < n$. 因为 $(c_i + t) + 2 = c_i + t + 2$, 所以 $c_i + t + 2 \notin C$. 又 $t + 2 < c_i + t$, 由上面所证 $t + 2 \in A$. 而 $c_i + (t + 2) = c_i + t + 2$, 所以 $c_i + t + 2 \notin B$. 从而 $c_i + t + 2 \in A$. 断言成立.

于是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 中的奇数均在 A 中, 从而 $|B \cup C| \leqslant \frac{n}{2}$, $\min(|B|, |C|) \leqslant \frac{n}{4}$. 即(3)成立.

如果 A 由 $1, 2, \cdots, 4m$ 中的奇数组成, B, C 从剩下的数中各取一半, 那么 A, B, C 满足要求 $(n = 4m)$, 并且 $\min(|A|, |B|, |C|) = \frac{n}{4}$. 所以估计(3)是最佳的.

下面的例 3 则是构造性的.

例 3 证明有无穷多个 $n=3m$，使得集合 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 有分拆

$$\begin{aligned}A&=\{a_1, a_2, \cdots, a_m\},\\ B&=\{b_1, b_2, \cdots, b_m\},\\ C&=\{c_1, c_2, \cdots, c_m\},\end{aligned} \tag{4}$$

满足：

$$a_i+b_i=c_i \quad (i=1, 2, \cdots, m). \tag{5}$$

解 显然 $\{1, 2, 3\}=\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}$ 满足 $1+2=3$. 设对于 m 有形如(4)的 $\{1, 2, \cdots, 3m\}$ 的分拆满足(5). 令

$$\begin{aligned}A_1&=2A\cup\{1, 3, \cdots, 6m+1\},\\ B_1&=2B\cup\{9m+2, 9m+1, \cdots, 6m+2\},\\ C_1&=2C\cup\{9m+3, 9m+4, \cdots, 12m+3\},\end{aligned}$$

其中 $2A$ 表示将 A 中每一个元素乘以 2 所得的集合. 不难验证 A_1, B_1, C_1 是 $\{1, 2, \cdots, 12m+3\}$ 的分拆，而且满足相应于(5)的等式.

于是，对无穷多个自然数 n(例如 $3, 3\times5, \cdots, 3\times(4m+1), \cdots$)，$X$ 有分拆满足(5)，即命题成立.

更强的结论是例 4.

例 4 证明 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 有分拆(4)满足(5)的充分必要条件是 $n=3\times4k$ 或 $3\times(4k+1)$.

解 如果有分拆(4)满足(5)，那么 $n=3m$ 并且

$$1+2+\cdots+(3m)=\frac{(1+3m)\cdot3m}{2} \tag{6}$$

是 C 中元素的和的 2 倍. (6)是偶数，所以

$$m = 4k \text{ 或 } 4k + 1. \tag{7}$$

(7)也是充分条件.

当 $m = 4k$ 时,可排下表:

1	2	3	4	…	$2k-3$	$2k-2$	$2k-1$	$2k$	$2k+1$	…	$4k-4$	$4k-3$	$4k-2$	$4k-1$	$4k$
$11k$	$6k$	$10k-1$	$6k-1$	…	$9k+2$	$5k+2$	$8k+2$	$5k+1$	$9k+1$	…	$4k+3$	$8k+3$	$4k+2$	$6k+1$	$4k+1$
$11k+1$	$6k+2$	$10k+2$	$6k+3$	…	$11k-1$	$7k$	$10k+1$	$7k+1$	$11k+2$	…	$8k-1$	$12k$	$8k$	$10k$	$8k+1$

第一行自左到右由 1 排至 $4k$. 第二行自右到左,排 $4k+1$, $4k+2$, …, $6k$, 间隔为 1;然后在 $4k-1$, $2k-1$, 1 的下方分别排 $6k+1$, $8k+2$, $11k$, 其余地方自右到左排 $8k+3$, $8k+4$, …, $10k-1$. 第三行的元素是前两行同列元素的和.

将这三行作为 A, B, C 即满足要求.

当 $m = 4k+1(k \geqslant 3)$ 时,可排相应的表:

1	3	5	7	…	$4k+1$	$4k$	$2k+2$	2	4	…	$2k$	$2k+4$	…	$4k-2$
$11k+4$	$6k+1$	$6k$	$6k-1$	…	$4k+2$	$6k+3$	$6k+2$	$10k+2$	$10k+1$	…	$9k+3$	$9k+2$	…	$8k+5$
$11k+5$	$6k+4$	$6k+5$	$6k+6$	…	$8k+3$	$10k+3$	$8k+4$	$10k+4$	$10k+5$	…	$11k+3$	$11k+6$	…	$12k+3$

而当 $m = 5, 9$ 时表如下:

1	2	3	4	5
7	13	9	10	6
8	15	12	14	11

1	2	3	4	5	6	7	8	9
12	23	14	22	15	21	11	16	10
13	25	17	26	20	27	18	24	19

本题与 Langford 问题密切相关,参见《对应》(王子侠,单墫著,科技文献出版社 1989 年出版).

3.12 覆　　盖

集 X 的覆盖是指 X 的一族(互不相同的非空)子集 A_1, A_2, …, A_k,它们的并集 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k = X$.

例 1　$X = \{1, 2, \cdots, n\}$ 的覆盖共有多少个(A_1,

$A_2, \cdots, A_k$ 的顺序不予考虑)?

解 X 的非空子集共 2^n-1 个，它们共组成 2^{2^n-1} 个子集族. 其中不含某一元素 i 的子集组成的族有 $2^{2^{n-1}-1}$ 个，不含某两个元素的子集组成的族有 $2^{2^{n-2}-1}$ 个，…… 于是由容斥原理，X 的覆盖共有

$$2^{2^n-1}-C_n^1 2^{2^{n-1}-1}+C_n^2\cdot 2^{2^{n-2}-1}-\cdots=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j 2^{2^{n-j}-1}$$

个.

例 2 若 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是 X 的覆盖，并且 X 的每一个元素恰属于 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 中的两个集，则称 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 为 X 的双覆盖. 求 $k=3$ 的双覆盖的个数.

解 X 中每一元素属于 A_1, A_2, A_3 中的某两个，因而有三种可能. n 个元素的归属共有 3^n 种可能. 除去 A_1, A_2, A_3 中恰有一个为空集的三种情况，共有 3^n-3 种. 由于 A_1, A_2, A_3 的顺序不予考虑，所以 $k=3$ 的双覆盖共 $\dfrac{3^n-3}{3!}$ 个.

注：设由 k 个集组成的双覆盖有 a_k 个，则

$$a_k=\frac{1}{k!}((C_k^2)^n-ka_{k-1}).$$

例 3 设 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一族子集. 若对 X 中任一对元素 i, j，子集 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 中总有一个恰含 i, j 中的一个，则这族子集称为可分的. 求最小的 k，使得有一族子集 $A_1, A_2, \cdots, A_k$，既是覆盖又是可分的.

解 考虑 1.2 节所说的从属关系表. 当 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 为覆盖时，每一列至少有一个 1. 当 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 为可分的时，每两列均不完全相同.

由于表有 k 行，表中每个元素为 0 或 1，所以至多可以组

成 2^k-1 个两两不同的列，每列元素不全为 0. 于是

$$2^k-1\geqslant n,$$

即

$$k\geqslant[\log_2 n]+1. \tag{1}$$

另一方面，取 k 满足

$$2^k-1\geqslant n\geqslant 2^{k-1}. \tag{2}$$

作 n 个不同的、由 0 与 1 组成并且不全为 0 的、长为 k 的列（因为 $2^k-1\geqslant n$，这是可以办到的）. 这表的 k 行所代表的 k 个集既覆盖又可分. 因此所求 k 的最小值为 $[\log_2 n]+1$.

3.13 Stirling 数

将 n 元集 X 分拆为 k 个非空子集，分拆的个数（不计子集的顺序）称为第二类 Stirling 数，通常记为 $S_{(n,k)}$. 显然

$$S_{(n,1)}=1, \tag{1}$$

$$S_{(n,n)}=1. \tag{2}$$

（1 分拆，即 $k=1$ 的分拆，只有 $X=X$. n 分拆，只有 $X=\{1\}\cup\{2\}\cup\cdots\cup\{n\}$.）约定 $S_{(n,0)}=0$.

例 1 证明：

(i) $S_{(n,2)}=2^{n-1}-1$; (3)

(ii) $S_{(n,n-1)}=C_n^2$; (4)

(iii) $S_{(n+1,k)}=S_{(n,k-1)}+kS_{(n,k)}$; (5)

(iv) $S_{(n+1,k)}=\sum\limits_{j=k-1}^{n}C_n^jS_{(j,k-1)}$; (6)

(v) 当 $n\geqslant 2$ 时，

$$S_{(n,1)} - 1!S_{(n,2)} + 2!S_{(n,3)} - \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1}(n-1)!S_{(n,n)} = 0. \qquad (7)$$

解　(i) 固定 $1 \in A_1$. 其余的 $n-1$ 个元素各有两种归属：属于 A_1 或 A_2. 因此共有 2^{n-1} 种归属. 除去全属于 A_1 的那种，共有 $2^{n-1}-1$ 种分拆.

(ii) 取两个元素作成二元集，有 C_n^2 种方法. 其余的 $n-2$ 个元构成 $n-2$ 个单元集（只含一个元素的集）.

(iii) $n+1$ 元集 $\{1, 2, \cdots, n+1\}$ 的 k 分拆可分为两类：第一类有集 $\{n+1\}$，第二类没有 $\{n+1\}$.

去掉 $n+1$ 后，第一类的分拆成为$\{1, 2, \cdots, n\}$的 $k-1$ 分拆，并且$\{1, 2, \cdots, n\}$的每一个 k 分拆添加 $\{n+1\}$ 后成为第一类的分拆. 因此第一类分拆共 $S_{(n,k-1)}$ 个.

去掉 $n+1$ 后，第二类的分拆成为$\{1, 2, \cdots, n\}$的 k 分拆，并且$\{1, 2, \cdots, n\}$的每一个 k 分拆添加 $n+1$ 有 k 种方法（$n+1$ 可放到 k 个子集的任一个中），添加后就成为第二类的分拆（这些分拆互不相同）. 因此第二类分拆共 $kS_{(n,k)}$ 个.

于是(5)成立.

(iv) 在 $\{1, 2, \cdots, n+1\}$ 的 k 分拆中去掉含 $n+1$ 的子集，得到 $j(k-1 \leqslant j \leqslant n)$ 元集的 $k-1$ 分拆. 这些 $k-1$ 分拆各不相同（否则原来的 k 分拆相同）.

反之，从 $\{1, 2, \cdots, n+1\}$ 任取 j 个元素（有 C_n^j 种方法），得到 j 元集 J. J 的任一个 $k-1$ 分拆，添加集 $\{1, 2, \cdots, n+1\}-J$ 后成为 $\{1, 2, \cdots, n+1\}$ 的 k 分拆. 这样产生的 k 分拆显然各不相同.

因此(6)成立.

(v) 由(5)式，

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}(k-1)!S_{(n+1,k)}$$

$$=\sum_{k=2}^{n+1}(-1)^{k-1}(k-1)!S_{(n,k-1)}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k!S_{(n,k)}$$

$$=-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k!S_{(n,k)}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k!S_{(n,k)}$$

$$=0.$$

于是(7)对一切 $n\geqslant 2$ 成立.

n 元集的分拆的个数 $\sum_{k=1}^{n}S_{(n,k)}$ 称为 Bell 数，记为 B_n(第 n 个 Bernoulli 数也常记成 B_n，但本书不出现 Bernoulli 数. 因此没有混淆的危险). 显然 $B_1=1$. 又约定 $B_0=1$.

例 2 证明：

$$B_{n+1}=\sum_{m=0}^{n}C_n^m B_m. \tag{8}$$

解 由(6)，

$$B_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}S_{(n+1,k)}$$

$$=\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{j=k-1}^{n}C_n^j S_{(j,k-1)}$$

$$=\sum_{j=0}^{n}C_n^j\sum_{k=1}^{j+1}S_{(j,k-1)}$$

$$=\sum_{j=0}^{n}C_n^j\sum_{k=1}^{j}S_{(j,k)}$$

$$=\sum_{j=0}^{n}C_n^j B_j.$$

我们知道 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=e$. 因此 $B_1=\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{k!}$. 借助(8)及归纳法可得 $n=0, 1, 2, \cdots$ 时,

$$B_n=\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}\quad (约定\ 0^0=1). \tag{9}$$

$\Big($设(9)成立,则 $B_{n+1}=\frac{1}{e}\sum_{j=0}^{n}C_n^j\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^j}{k!}=\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{n}C_n^jk^j$

$=\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot(k+1)^n=\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)^{n+1}}{(k+1)!}=\frac{1}{e}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{n+1}}{k!}.\Big)$

例 3 设非空子集 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 是 X 的覆盖,并且 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 中任意 $k-1$ 个的并都是 X 的真子集,则称这一覆盖为既约覆盖. 令 $I_{(n,k)}$ 表示 n 元集 X 的、由 k 个集组成的既约覆盖的个数. 证明:

$$I_{(n,k)}=\sum_{j=k}^{n}C_n^j(2^k-k-1)^{n-j}S_{(j,k)}; \tag{10}$$

$$I_{(n,n-1)}=\frac{1}{2}n(2^n-n-1); \tag{11}$$

$$I_{(n,2)}=S_{(n+1,3)}. \tag{12}$$

解 对每个 $j\geqslant k$, 从 X 中取 j 个元组成集 J. J 有 $S_{(j,k)}$ 个 k 分拆. 对每一个分拆 $B_1, B_2, \cdots, B_k$. 将 $X-J$ 的 $n-j$ 个元分配到这 k 个集中,每个元至少属于两个集. 因此,每个元可属于某个 B_i,也可不属于 B_i,这有 2^k 种可能. 除去不属于任一个 B_i 的一种及仅属于一个 B_i 的 k 种,还有 2^k-k-1 种可能. $n-j$ 个元分配完毕,就产生 X 的由 k 个集组成的覆盖,而且是既约覆盖(因为 J 的每个元只属于这 k 个集中的一个). 这就得到 $\sum_{j=k}^{n}C_n^j(2^k-k-1)^{n-j}S_{(j,k)}$ 个 X 的既约覆盖. 显

然它们各不相同.

反之,对 X 的每一个由 k 个子集组成的既约覆盖,设 J 为仅在一个子集中出现的元素所成的集,则 $|J|\geqslant k$,并且用上述作法便可产生这个既约覆盖. 因此(10)成立.

由于 $S_{(n,n-1)}=C_n^2$,所以由(10),

$$I_{(n,n-1)}=S_{(n,n-1)}+n(2^{n-1}-n)=\frac{n}{2}(2^n-n-1).$$

为了求出 $I_{(n,2)}$,设 $y\notin X$. $\{y\}\cup X$ 的每个分拆 $B_1\cup B_2\cup B_3$ (不妨设 $y\in B_3$),对应于 X 的既约覆盖 $B_1\cup B_3-\{y\}$, $B_2\cup B_3-\{y\}$.

反之,对 X 的每个既约覆盖 A_1, A_2. 令

$$A=A_1\cap A_2,\ B_1=A_1-A,$$
$$B_2=A_2-A,\ B_3=A\cup\{y\},$$

则 B_1, B_2, B_3 是 $\{y\}\cup X$ 的分拆.

由上述一一对应得出(12)成立.

对每个自然数 n,令

$$[x]_n=x(x-1)\cdots(x-n+1). \tag{13}$$

我们有下面的(14).

例 4 证明:

$$x^n=\sum_{k=1}^{n}S_{(n,k)}[x]_k. \tag{14}$$

解 考虑从 n 元集 X 到 m 元集 Y 的映射 f 的个数. 这里 $m\leqslant n$.

由 2.1 节例 5,这种映射的个数为 m^n.

另一方面,从 m 元集 Y 中任取 k 个元 y_1, y_2, …, y_k 作为 f 的像集(有 C_m^k 种取法),对 n 元集 X 的任一个 k 分拆

$A_1, A_2, \cdots, A_k$,令所有 $x \in A_i$ 的像 $f(x) = y_j(i, j = 1, 2, \cdots, k)$. 这样共产生 $\sum_{k=1}^{m} C_m^k \cdot k! \cdot S_{(n,k)}$ 个互不相同的映射. 显然每个从 X 到 Y 的映射均可这样产生. 所以

$$m^n = \sum_{k=1}^{m} C_m^k \cdot k! \cdot S_{(n,k)} = \sum_{k=1}^{n} [m]_k S_{(n,k)}. \quad (15)$$

(显然 $k > m$ 时, $[m]_k = 0$.)

(15)表明(14)对于 $x = 1, 2, \cdots, n$ 均成立. 由于次数不超过 $n-1$ 的多项式 $x^n - \sum_{k=1}^{n} [x]_k S_{(n,k)}$ 在 n 个 x 值 $(x = 1, 2, \cdots, n)$ 为 0,所以恒有

$$x^n - \sum_{k=1}^{n} [x]_k S_{(n,k)} = 0,$$

即(14)成立.

$[x]_n$ 可以展开成 x 的多项式:

$$[x]_n = \sum_{k=1}^{n} s_{(n,k)} x^k, \quad (16)$$

其中 $s_{(n,k)}$ 称为第一类 Stirling 数. 由 Viete 定理,从 $-1, -2, \cdots, -(n-1)$ 中任取 $n-1-k$ 个相乘,再将这些积相加,所得的和就是 $s_{(n,k)}$.

由于

$$\begin{aligned}
[x]_n &= \sum_{k=1}^{n} s_{(n,k)} x^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} s_{(n,k)} \sum_{m=1}^{k} [x]_m S_{(k,m)} \\
&= \sum_{m=1}^{n} \Big(\sum_{k=m}^{n} s_{(n,k)} S_{(k,m)} \Big) [x]_m,
\end{aligned}$$

所以比较$[x]_m$的系数得

$$\sum_{k=m}^{n} s_{(n,k)} S_{(k,m)} = \delta_{n,m}.$$

(其中$\delta_{n,m}$当$n=m$时为1,当$n \neq m$时为0,称为Kronecker符号.)

同样由

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} S_{(n,k)} [x]_k = \sum_{k=1}^{n} S_{(n,k)} \sum_{m=1}^{k} s_{(k,m)} x^m,$$

得

$$\sum_{k=m}^{n} S_{(n,k)} s_{(k,m)} = \delta_{n,m}.$$

3.14 $M_{(n,k,h)}$

设X是n元集.$\mathscr{A}$是X的一些h元子集所成的族,并且具有性质$P_k(X)$:X的任一k元子集($n \geqslant k \geqslant h \geqslant 1$)至少包含$\mathscr{A}$中一个$h$元子集.具有这种性质的$\mathscr{A}$中,$|\mathscr{A}|$的最小值记为$M_{(n,k,h)}$.

例1 证明:

(i) $M_{(n,k,h)} \leqslant \dfrac{n}{h} M_{(n-1,k-1,h-1)}$; (1)

(ii) $M_{(n,k,h)} \geqslant \dfrac{n}{n-h} M_{(n-1,k,h)}$; (2)

(iii) $M_{(n,k,h)} \leqslant M_{(n-1,k-1,h-1)} + M_{(n-1,k,h)}$. (3)

解 (i) 设$\mathscr{A}$具有性质$P_k(X)$,并且$|\mathscr{A}| = M_{(n,k,h)}$.对任一元素$x \in X$,考虑$n-1$元集$Y = X - \{x\}$.设$Y$

的$h-1$元子集族$\mathscr{B}$具有性质$P_{k-1}(Y)$，并且$|\mathscr{B}|=M_{(n-1,k-1,h-1)}$。将$x$添到$\mathscr{B}$中每个$h-1$元子集里成为$h$元集，$\mathscr{A}$中所有不含$x$的$h$元集与它们构成$h$元子集族$\mathbf{C}$.

$\mathbf{C}$具有性质$P_k(X)$. 事实上，设S是X的k元子集. 若$x\notin S$，则由于$\mathscr{A}$具有性质$P_k(X)$，S包含$\mathscr{A}$中一个h元集，这集不含x，因而也是$\mathbf{C}$中的h元集. 若$x\in S$，则$S-\{x\}\subseteq Y$. 由于$\mathscr{B}$具有性质$P_{k-1}(Y)$，$S-\{x\}$包含$\mathscr{B}$中一个$h-1$元集B，S包含h元集$B\cup\{x\}$，$B\cup\{x\}$在$\mathbf{C}$中.

因此$|\mathbf{C}|\geqslant M_{(n,k,h)}=|\mathscr{A}|$，即

$$|\mathscr{B}|\geqslant a_x, \tag{4}$$

其中a_x为$\mathscr{A}$中含x的h元集的个数. 上式即

$$M_{(n-1,k-1,h-1)}\geqslant a_x. \tag{5}$$

对x求和得

$$nM_{(n-1,k-1,h-1)}\geqslant\sum_{x\in X}a_x. \tag{6}$$

由于$\mathscr{A}$中每个子集是h元集，所以每个子集对于和$\sum_{x\in X}a_x$的贡献是h. 从而$\sum_{x\in X}a_x$即$hM_{(n,k,h)}$. 于是(6)导出(1).

(ii) $\mathscr{A}$中不含x的子集构成Y中的h元子集族$\mathscr{A}_x$. 并且Y的每一个k元子集也是X的k元子集，应当包含$\mathscr{A}$中一个不含x的h元子集，即包含$\mathscr{A}_x$中一个h元子集. 所以$\mathscr{A}_x$具有性质$P_k(Y)$，$|\mathscr{A}_x|\geqslant M_{(n-1,k,h)}$.

对x求和得

$$\sum_{x\in X}|\mathscr{A}_x|\geqslant nM_{(n-1,k,h)}. \tag{7}$$

$\mathscr{A}$中每个子集对于和$\sum_{x\in X}|\mathscr{A}_x|$的贡献是$n-h$，所以

$\sum_{x \in X} |\mathscr{A}_x| = (n-h)M_{(n,k,h)}$，从而(7)导出(3).

(iii) 考虑 $n-1$ 元集 Y. 设 Y 的 h 元子集族 $\mathscr{E}$ 具有性质 $P_k(Y)$，$h-1$ 元子集族 $\mathscr{B}$ 具有性质 $P_{k-1}(Y)$，并且 $|\mathscr{E}| = M_{(n-1,k,h)}$，$|\mathscr{B}| = M_{(n-1,k-1,h-1)}$.

令 $X = Y \cup \{x\}$ 为 n 元集. 考虑 X 的 h 元子集族 $\mathscr{A}$，它由 $\mathscr{B}$ 中子集各添加 x(成为 h 元集)及 $\mathscr{E}$ 中子集组成.

对 X 的每个 k 元子集 S. 若 $x \notin S$，则 $\mathscr{E}$ 中有 h 元子集包含在 S 内. 若 $x \in S$，则 $\mathscr{B}$ 中有子集 $B_1 \subseteq S - \{x\}$，即 $B_1 \cup \{x\} \subseteq S$. 所以 $\mathscr{A}$ 具有性质 $P_k(X)$. 从而

$$M_{(n,k,h)} \leqslant |\mathscr{A}| = M_{(n-1,k,h)} + M_{(n-1,k-1,h-1)}.$$

注 1：从(ii)，(iii)可导出(i).

注 2：(i)，(ii)是由 n 元集 X 到 $n-1$ 元集 Y；(iii)则需要先造好 $n-1$ 元集 Y 的两个子集族，再扩充到 X.

例 2 证明：

$$M_{(n,k,h)} \geqslant \left\lceil \frac{n}{n-h} \left\lceil \frac{n-1}{n-h-1} \left\lceil \cdots \left\lceil \frac{k+1}{k-h+1} \right\rceil \cdots \right\rceil \right\rceil \right\rceil. \tag{8}$$

这里 $\lceil x \rceil$ 表示不小于 x 的最小整数，称为天花板函数.

解 显然 $M_{(k,k,h)} = 1$ (k 元集 X 的 k 元子集只有一个即 X 自身，它包含任一个 h 元子集). 由(2)

$$M_{(k+1,k,h)} \geqslant \left\lceil \frac{k+1}{k-h+1} M_{(k,k,h)} \right\rceil = \left\lceil \frac{k+1}{k-h+1} \right\rceil.$$

设(8)对 $n-1$ 成立，则

$$M_{(n,k,h)} \geqslant \left\lceil \frac{n}{n-h} M_{(n-1,k,h)} \right\rceil$$

$$\geqslant\left\lceil\frac{n}{n-h}\left\lceil\frac{n-1}{n-h-1}\left\lceil\cdots\left\lceil\frac{k+1}{k-h+1}\right\rceil\cdots\right\rceil\right\rceil\right\rceil.$$

例 3 证明：

$$\frac{C_n^h}{C_k^h}\leqslant M_{(n,k,h)}\leqslant C_{n-k+h}^h. \tag{9}$$

解 设 X 的 h 元子集的族 $\mathscr{A}$ 具有性质 $P_k(X)$，并且 $|\mathscr{A}|=M_{(n,k,h)}$. 将 $\mathscr{A}$ 中每个 h 元子集作为点，X 的每个 k 元子集也作点. 这样得到两个点集 X_1，X_2，$|X_1|=M_{(n,k,h)}$，$|X_2|=C_n^k$.

如果某个 h 元集包含在某个 k 元集中，就在相应的点间连一条边. 这样得到一个图. 图的两个部分 X_1，X_2 之间的边数有两种算法.

一方面，每个 h 元子集含于 C_{n-h}^{k-h} 个 k 元集中，所以边数 $=C_{n-h}^{k-h}\cdot M_{(n,k,h)}$.

另一方面，每个 k 元集至少含 $\mathscr{A}$ 中一个 h 元集，所以边数至少有 $|X_2|=C_n^k$ 条边.

综合以上两方面即得

$$C_{n-h}^{k-h}M_{(n,k,h)}\geqslant C_n^k.$$

(9)的上界由(3)及归纳法立即得出.

$M_{(n,k,h)}$ 表示最少需要多少张各载有 h 个数的票，才能保证自 n 个数中一次摇出 k 个数时，至少有一张票中奖.

一般的 $M_{(n,k,h)}$ 的表达式仍为未知.

例 4 设 $n\geqslant h(m+1)$，$h\geqslant 1$. 证明：

$$M_{(n,n-m,h)}=m+1. \tag{10}$$

解 X 的 $m+1$ 个 h 元子集

$$\{1, 2, \cdots, h\}, \{h+1, h+2, \cdots, 2h\}, \cdots,$$

$$\{mh+1, mh+2, \cdots, (m+1)h\}$$

所成的族 $\mathscr{A}$ 具有性质 $P_{n-m}(X)$. 事实上，对 X 的任一个 $n-m$ 元子集 S，X 恰有 m 个元不属于 S，这 m 个元至多在 $\mathscr{A}$ 中 m 个集里出现，所以 $\mathscr{A}$ 中至少有一个集的元素全属于 S. 于是

$$M_{(n, n-m, h)} \leqslant |\mathscr{A}| = m+1.$$

另一方面，如果子集族 $\mathscr{A}$ 由 $\leqslant m$ 个 h 元子集组成，从 X 中去掉 m 个元素，其中的 $|\mathscr{A}|$ 个元素各属于 $\mathscr{A}$ 中一个 h 元子集. 剩下的 $n-m$ 元集显然不包含 $\mathscr{A}$ 中任一个 h 元子集. 所以 $\mathscr{A}$ 不具有性质 $P_{n-m}(X)$.

可以证明

$$M_{(n, k, 2)} = C_n^2 - \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{n^2-r^2}{2} - C_r^2,$$

其中 r 是 n 除以 $k-1$ 所得的余数，$0 \leqslant r \leqslant k-2$.

第四章　各种子集族

4.1　S　族

若集族 $\mathscr{A}$ 中任意两个子集 A_i, $A_j(i\neq j)$ 互不包含，则称 $\mathscr{A}$ 为 S 族.

例 1　若 n 元集 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集族 $\mathscr{A}$ 是 S 族，则 $\mathscr{A}$ 的元数至多为 $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$，即

$$\max_{\mathscr{A}\text{是S族}} |\mathscr{A}| = C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}. \tag{1}$$

这是 Sperner(1905～　)在 1928 年发现的定理(S 族即 Sperner 族的简称).

解　考虑 n 个元素 1, 2, …, n 的全排列，显然全排列的总数为 $n!$

另一方面，全排列中前 k 个元素恰好组成 $\mathscr{A}$ 中某个集 A_i 的，有 $k!(n-k)!$ 个. 由于 $\mathscr{A}$ 是 S 族，所以这种"头"在 $\mathscr{A}$ 中的全排列互不相同. 设 $\mathscr{A}$ 中有 f_k 个 A_i 满足 $|A_i|=k(k=1, 2, \cdots, n)$，则

$$\sum_{k=1}^{n} f_k \cdot k!(n-k)! \leqslant n!. \tag{2}$$

熟知 C_n^k 在 $k=\left[\frac{n}{2}\right]$ 时最大，所以由(2)得

$$|\mathscr{A}|=\sum_{k=1}^{n}f_k\leqslant C_n^{[\frac{n}{2}]}\sum_{k=1}^{n}f_k\cdot\frac{k!(n-k)!}{n!}\leqslant C_n^{[\frac{n}{2}]}.$$

当 $\mathscr{A}$ 由 X 中全部 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 元子集组成时，$|\mathscr{A}|=C_n^{[\frac{n}{2}]}$. 因此(1)式成立.

又解 设 $\mathscr{A}=\{A_1,A_2,\cdots,A_t\}$. $A_1,A_2,\cdots,A_t$ 中元数最小的为 r 元集，共 f_r 个. 添加 X 的一个元素到这些 r 元集中，使它们成为 $r+1$ 元集. 对每个 r 元集有 $n-r$ 种添加方法，每个 $r+1$ 元集至多可由 $r+1$ 个 r 元集添加而得，所以经过添加后至少产生

$$\frac{f_r\cdot(n-r)}{r+1}$$

个 $r+1$ 元集. 由于 $\mathscr{A}$ 是 S 族，这些 $r+1$ 元集与 $A_1,A_2,\cdots,A_t$ 均不相同.

当 $r<\left[\frac{n}{2}\right]$ 时，

$$\frac{f_r(n-r)}{r+1}>f_r,$$

所以将 $A_1,A_2,\cdots,A_t$ 中的 r 元集换成添加后的 $r+1$ 元集，集合的个数即 $\mathscr{A}$ 的元数严格增加.

同样，设 $A_1,A_2,\cdots,A_t$ 中元数最大的为 s 元集. 当 $s>\left[\frac{n}{2}\right]$ 时，从每个 s 元集删去一个元素变成 $s-1$ 元集. 每个 $s-1$ 元集至多可由 $n-(s-1)$ 个 s 元集删减一个元素而得. 每个 s 元集可产生 s 个 $s-1$ 元集. 而

$$\frac{s}{n-(s-1)}\geqslant 1,$$

所以将 A_1, A_2, …, A_t 中的 s 元集换成删减而得的 $s-1$ 元集，$|\mathscr{A}|$ 增加.

因此，当 A_1, A_2, …, A_t 均为 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 元集时，t 最大，(1)式成立.

现在研究 $|\mathscr{A}|$ 何时取最大值.

从第一种解法立即得出当 n 为偶数时，当且仅当 $\mathscr{A}$ 由 X 的全部 $\frac{n}{2}$ 元集组成，$|\mathscr{A}|$ 取最大值 $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

当 n 为奇数 $2m+1$ 时，C_n^k 仅当 $k=m$, $m+1$ 时最大，从而当 $|\mathscr{A}|$ 最大时，$\mathscr{A}$ 中的子集 A_1, A_2, …, A_t 都是 m 元或 $m+1$ 元集. 假设 $A_1=\{1, 2, \cdots, m\}$，那么对于 $l>m$，集 $\{l, 1, 2, \cdots, m\} \notin \mathscr{A}$. 全排列

$$l, 1, 2, \cdots, m, \cdots \tag{3}$$

的前 $m+1$ 个元组成的集 $\notin \mathscr{A}$. 但既然(2)中等号成立，全排(3)的前 m 个元或前 $m+1$ 个元所成的集在 $\mathscr{A}$ 中. 因此 $\{l, 1, 2, \cdots, m-1\} \in \mathscr{A}$. 这表明对 $\mathscr{A}$ 中任一个 m 元集，将其中一个元换成其他元所得的 m 元集仍在 $\mathscr{A}$ 中. 经过这样的替代，易知 X 的全部 m 元集均在 $\mathscr{A}$ 中. 因此 $\mathscr{A}$ 由 X 的全部 m 元子集组成或者 $\mathscr{A}$ 不含 X 的任一个 m 元子集，后者即 $\mathscr{A}$ 由 X 的全部 $m+1$ 元子集组成.

于是当 n 为奇数 $2m+1$ 时，当且仅当 $\mathscr{A}$ 由 X 的全部 m 元子集组成或 $\mathscr{A}$ 由 X 的全部 $m+1$ 元子集组成，$|\mathscr{A}|$ 取最大值 $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

Sperner 定理有众多的应用.

例 2 11 个剧团中，每天有一些剧团演出，其他剧团观看(演出的不能观看). 如果每个剧团都看过其他 10 个剧团的演

出，问演出至少几天？

解　设共演出 n 天，第 i 个剧团不演的天数组成集 A_i $(i=1, 2, \cdots, 11)$，则 $A_1, A_2, \cdots, A_{11}$ 都是 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集.

由于每个剧团都看过其他剧团的演出，所以 A_i，$A_j (1 \leqslant i < j \leqslant 11)$ 互不包含（第 i 个剧团看第 j 个剧团演出的那一天属于 A_i 不属于 A_j）. 由 Sperner 定理，

$$11 \leqslant C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}. \tag{4}$$

$C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ 随 n 递增，$C_5^2=10$，$C_6^3=20$，所以 $n \geqslant 6$. 即至少演出 6 天.

Sperner 定理有众多的推广. 下面的例 3 属于 Bollobas (1965).

例 3　若 $A_1, A_2, \cdots, A_m$；$B_1, B_2, \cdots, B_m$ 都是 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集，当且仅当 $i=j$ 时，$A_i \cap B_j=\varnothing$. $|A_i|=a_i$，$|B_i|=b_i (i=1, 2, \cdots, m)$，则

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{C_{a_i+b_i}^{a_i}} \leqslant 1. \tag{5}$$

解　考虑 $n!$ 个全排列. A_i 的元素全在 B_i 的元素前面的全排列共有

$$C_n^{a_i+b_i} \cdot a_i!b_i!(n-a_i-b_i)! = \frac{n!}{C_{a_i+b_i}^{a_i}} \tag{6}$$

个. 如果一个全排列中，A_i（的元素）全在 B_i（的元素）前面，A_j 也全在 B_j 前面，$i \neq j$，那么在 A_i 已经结束 B_j 尚未开始的情况中，$A_i \cap B_j=\varnothing$. 而在 A_i 结束前 B_j 已经开始的情况中，$A_j \cap B_i=\varnothing$. 均与已知矛盾. 所以每一个全排列中，至多有一个 A_i 在相应的 B_i 前面. 因此，由(6)对 i

求和得

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{n!}{C_{a_i+b_i}^{a_i}} \leqslant n!,$$

即(5)成立.

如果取 $B_i = A_i'$，那么 $A_i \cap B_i = \varnothing$. 并且 $A_i \cap B_j \neq \varnothing$，即 $A_i \not\subseteq A_j$. 这时(5)成为

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{C_n^{a_i}} \leqslant 1.$$

再由 $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ 的最大性即导出 Sperner 定理.

4.2 链

如果 X 的子集族 $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 中的子集满足

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_t, \tag{1}$$

那么 $\mathscr{A}$ 称为一条(长为 t 的)链.

例 1 设 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_m$ 为 X 的 m 条链. 每两条均不可比较，即任一条链中的成员(子集)都不是另一条链的成员的子集. 若每条链的长均为 $k+1$，用 $f(n, k)$ 表示 m 的最大值. 证明：

$$f(n, k) = C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}. \tag{2}$$

解 首先设 m 条链

$$A_{i0} \subset A_{i1} \subset \cdots \subset A_{ik} \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

满足题述条件.

在上节例 3 中取 $A_i = A_{i0}$，$B_i = A_{ik}'$，则 $a_i = |A_{i0}|$，$b_i = n - |A_{ik}| \leqslant n - (a_i + k)$，因此

$$C_{a_i+b_i}^{a_i} \leqslant C_{n-k}^{a_i} \leqslant C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}.$$

显然 $A_i \cap B_i \subseteq A_{ik} \cap A'_{ik} = \varnothing$. 若有 $i \neq j$ 使 $A_i \cap B_j = \varnothing$，则 $A_{i0} \subseteq A_{jk}$，与已知矛盾. 因此 A_i，$B_i (i = 1, 2, \cdots, m)$ 适合上节例 3 的条件，从而

$$m = \sum_{i=1}^{m} 1 \leqslant \sum_{i=1}^{m} \frac{C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}}{C_{a_i+b_i}^{a_i}} \leqslant C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}.$$

于是

$$f(n, k) \leqslant C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}.$$

其次，设 M_i 为 $\{k+1, k+2, \cdots, n\}$ 的 $\left[\frac{n-k}{2}\right]$ 元子集，这样的子集有 $C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}$ 个. 链

$$M_i \subset M_i \cup \{1\} \subset M_i \cup \{1, 2\} \subset \cdots$$
$$\subset M_i \cup \{1, 2, \cdots, k\} \left(i = 1, 2, \cdots, C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}\right)$$

满足题述条件.

综上所述，(2)式成立.

当 $k = 0$ 时，例 1 即 Sperner 定理.

如果链(1)中，

$$|A_{i+1}| = |A_i| + 1, \ i = 1, 2, \cdots, t-1,$$

并且

$$|A_1| + |A_t| = n,$$

那么链(1)称为对称链.

显然每条对称链含有一个 X 的 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 元子集. 当 n 为偶数 $2m$ 时，对称链(1)的长度 t 为奇数，位于中央的集 $A_{\frac{t+1}{2}}$ 是 m

元集. 当 n 为奇数 $2m+1$ 时, t 是偶数, 中央的两个集 $A_{\frac{t}{2}}$, $A_{\frac{t}{2}+1}$ 分别为 m 元与 $(m+1)$ 元集.

例 2 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的全体子集可分拆为 $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ 条互不相交的对称链(每个子集在且仅在一条链中).

解 对 n 归纳. $n=1$ 时结论显然成立. 设命题对 $n-1$ 成立, 即 $\{1, 2, \cdots, n-1\}$ 的全体子集可分拆为 $C_{n-1}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]}$ 条互不相交的对称链. 设

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_t \tag{3}$$

为其中任一条. 考虑链

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_t \subset A_t \cup \{n\} \tag{4}$$

与

$$A_1 \cup \{n\} \subset A_2 \cup \{n\} \subset \cdots \subset A_{t-1} \cup \{n\} \tag{5}$$

(当 $t=1$ 时, (5)不存在).

显然(4), (5)是 X 的对称链.

设 A 为 X 的子集. 如果 $n \notin A$, 那么 A 必恰在一条形如(3)的链中, 从而 A 也恰在一条形如(4)的链中, 同时 A 显然不在形如(5)的链中. 如果 $n \in A$, 那么 $A-\{n\}$ 恰在一条形如(3)的链中, 在它等于 A_t 时, A 恰在一条形如(4)的链中, 在它不等于 A_t 时, A 恰在一条形如(5)的链中.

于是 X 的全部子集被分拆为若干条互不相交的对称链. 由于每条对称链中恰有一个 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 元集, 所以对称链的条数为 $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

显然从每一条链中至多选出一个集合组成 S 族. 所以例 2 导出 Sperner 定理.

链的概念不限于包含关系，它可以推广到任意一种偏序关系. 即只要某个集合 S 的某些元素之间有关系 $\succ$，并且 $x\succ y$，$y\succ z$ 时，$x\succ z$（传递性），那么 S 中就存在与(1)类似的链：

$$x_1\succ x_2\succ\cdots\succ x_t. \tag{6}$$

例如，若自然数 $a|b$，则称 $a\succ b$. 这就是一种偏序关系. 一个自然数 m 的因数可以按照这种偏序关系排成链 $d_1\succ d_2\succ\cdots\succ d_t$. 当 d_1d_t 与 m 的素因数个数（计及重数）相等，并且 d_{i+1} 比 $d_i(i=1, 2, \cdots, t-1)$ 恰多一个素因数时，这种链称为对称链. 例如

$$1\succ 2\succ 2^2\succ 2^2\times 3\succ 2^2\times 3^2\succ 2^2\times 3^2\times 5,$$

$$3\succ 2\times 3\succ 2\times 3^2\succ 2\times 3^2\times 5,$$

都是 $180=2^2\times 3^2\times 5$ 的对称链.

例 3 自然数 m 的全部（正）因数可以分为互不相交的对称链.

解 当 $m=p^\alpha$，p 为质数，α 为非负整数时，m 的因数组成一条对称链

$$1, p, p^2, \cdots, p^{\alpha-1}, p^\alpha.$$

设命题对质因数个数（不计重数）小于 n 的数 m_1 成立. 考虑 $m=m_1p^\alpha$，$p\nmid m_1$.

将 m_1 的因数分为互不相交的对称链. 设

$$d_1, d_2, \cdots, d_h$$

是其中一条.

作表

d_1	d_2	$\cdots$	d_{h-2}	d_{h-1}	d_h
d_1p	d_2p	$\cdots$	$d_{h-2}p$	$d_{h-1}p$	d_hp
d_1p^2	d_2p^2	$\cdots$	$d_{h-2}p^2$	$d_{h-1}p^2$	d_hp^2
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$d_1p^{\alpha-1}$	$d_2p^{\alpha-1}$	$\cdots$	$d_{h-2}p^{\alpha-1}$	$d_{h-1}p^{\alpha-1}$	$d_hp^{\alpha-1}$
d_1p^{α}	d_2p^{α}	$\cdots$	$d_{h-2}p^{\alpha}$	$d_{h-1}p^{\alpha}$	d_hp^{α}

最外层的

$$d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_{h-2},\ d_{h-1},\ d_h,\ d_hp,\ d_hp^2,\ \cdots,\ d_hp^{\alpha}$$

组成 m 的对称链.

同样,从外到内,每一层的数都组成 m 的对称链.

易知 m 的每个因数都在上述形状的对称链中出现. 因此命题成立.

例 3 是 de Bruijn 等 1951 年证明的.

设 P_1, P_2, $\cdots$, P_n 都是 n 元集 X 的分拆. 如果 P_1 仅一个集即 X,P_i 由 i 个集 A_1, A_2, $\cdots$, A_i($A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_i=X$, A_1, A_2, $\cdots$, A_i 两两之交为$\varnothing$)组成,并且 P_{i+1} 是由 P_i "加细"得到的,即将 A_1, A_2, $\cdots$, A_i 中某一个分拆为两个集,$i=0$, 1, $\cdots$, $n-1$,那么 P_1, P_2, $\cdots$, P_n 称为一个长为 n 的分拆链.

例 4 求长为 n 的分拆链的个数.

解 P_n 仅一种,即$\{1\}$, $\{2\}$, $\cdots$, $\{n\}$. 若已有

$$P_n,\ P_{n-1},\ \cdots,\ P_{k+1}.$$

每一个是后一个的加细,则可将 P_{k+1} 中任两个集并为一个集产生 P_k,因此 P_k 有 C_{k+1}^2 种可能. 从而长为 n 的分拆链共

$$\prod_{k=1}^{n-1} C_{k+1}^2 = \frac{(n-1)!n!}{2^{n-1}}$$

个.

4.3 Dilworth 定 理

在上节例 2 中,链的条数恰好等于 S 族的元数的最大值.这是下面例 1(Dilworth 定理)的特例.

例 1 集族 $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 分拆为互不相交的链时,所需用的链的最少条数 m 等于 P 中元数最多的 S 族的元数 s.

解 S 族的 s 个元是互不包含的,每条链至多含一个这样的元,所以 $m \geqslant s$.

为了证明 $s \geqslant m$,我们对 t 进行归纳. $t=1$ 时结论显然.假设命题对小于 t 的值成立.考虑 t 元集 $\mathscr{A}$.

对 $\mathscr{A}$ 中任一元数为 s 的 S 族 $\mathscr{B}$,不在 $\mathscr{B}$ 中的元 A 必与 $\mathscr{B}$ 中某一元 B 有包含关系(否则 A 可添加到 $\mathscr{B}$ 中,与 s 的最大性矛盾).将满足 $A \supset B$ 的 A 归入一族,记为 $\mathscr{B}_1$.满足 $A \subset B$ 的 A 归人另一族,记为 $\mathscr{B}_2$(由于 $\mathscr{B}$ 是 S 族,不存在同时发生 $A \supset B$, $C \supset A$,而 B, $C \in \mathscr{B}$ 的情况).

如果 $\mathscr{B}_1$,$\mathscr{B}_2$ 都非空,令

$$\mathscr{A}_1 = \mathscr{B} \cup \mathscr{B}_1, \quad \mathscr{A}_2 = \mathscr{B} \cup \mathscr{B}_2,$$

则 $|\mathscr{A}_1|$, $|\mathscr{A}_2|$ 都小于 t.由归纳假设,$\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ 均可分拆为 s 条链.因为 $\mathscr{B}$ 为 S 族,所以在 $\mathscr{A}_1$ 中,$\mathscr{B}$ 的元都是最小元,从而 $\mathscr{A}_1$ 的 s 条链的终端正是 $\mathscr{B}$ 的 s 个元.同样,$\mathscr{A}_2$ 的 s 条链的始端也是 $\mathscr{B}$ 的 s 个元(作为最大元).因此可将 $\mathscr{A}_1$ 的链与 $\mathscr{A}_2$ 的链逐对连接起来形成 $\mathscr{A}$ 的链, $s \geqslant m$.

如果对 $\mathscr{A}$ 中任一元数为 s 的 S 族 $\mathscr{B}$ 而言，$\mathscr{B}_1$，$\mathscr{B}_2$ 至少有一个为空，那么 $\mathscr{A}$ 至多有两个元数为 s 的 S 族，即 $\mathscr{A}$ 的最大元（它不包含在 $\mathscr{A}$ 的其他元素中）所成的族 $\mathscr{E}$ 与 $\mathscr{A}$ 的最小元（它不包含 $\mathscr{A}$ 的其他元素）$\mathscr{F}$. 于是有以下三种情况：

(a) 仅集族 $\mathscr{E}$ 有 s 个元. 这时从 $\mathscr{E}$ 中去掉一个元 A，$\mathscr{A}$ 剩下 $t-1$ 个元，并且 $\mathscr{A}$ 中最大的 S 族仅 $s-1$ 个元，所以由归纳假设，可分拆为 $s-1$ 条链，添上 A 单独一个所成的链，共 s 条.

(b) 仅集族 $\mathscr{F}$ 有 s 个元. 与(a)类似，$\mathscr{A}$ 可分拆为 s 条链.

(c) $\mathscr{E}$, $\mathscr{F}$ 均有 s 个元. 任取 $B\in\mathscr{F}$, 必有 $A\in\mathscr{E}$, $A\supset B$. 去掉 A, B 后，剩下的元组成 $s-1$ 条链，添上链 $A\supset B$, 共 s 条链.

注：例 1 中的集族可改为任意的半序集，$\subset$ 改为半序关系 $\succ$.

Dilworth 定理有很多应用.

例 2 任意的 $mn+1$ 个自然数中，能找出 $m+1$ 个数，使得每一个数能整除比它大的数；或者能找出 $n+1$ 个数，使得每一个数都不整除其他的数.

解 与上节例 3 相同，以 $a|b$ 作为自然数集的半序关系 $a\succ b$.

如果链的长度均不超过 m，那么由于 $\left[\dfrac{mn+1}{m}\right]=n+1$，所以至少有 $n+1$ 条链. 根据 Dilworth 定理，有 $n+1$ 个数组成 S 族，即每一个数都不整除其他的数.

例 3 实数数列

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{mn+1} \tag{1}$$

中一定能找出一个 $m+1$ 项的递增的子列或能找出一个 $n+1$

项的递减的子列.

解 若 $a_i \leqslant a_j$, $i<j$, 则称 $a_i \succ a_j$. 如果(1)中递增的子列至多 m 项,那么(1)至少能分为 $n+1$ 条链. 从而有 $n+1$ 项组成 S 族,即有一个 $n+1$ 项的递减数列.

下面的例 4 与例 1 对偶.

例 4 设 $\mathscr{A}$ 为偏序集,证明若 $\mathscr{A}$ 不含长为 $m+1$ 的链,则 $\mathscr{A}$ 可以表成至多 m 个 S 族的并.

解 $m=0$ 时结论显然. 设命题对 $m-1$ 成立.

$\mathscr{A}$ 的极大元组成 S 族 $\mathscr{B}$. $\mathscr{A}-\mathscr{B}$ 不含长为 m 的链. 由归纳假设, $\mathscr{A}-\mathscr{B}$ 可以表成至多 $m-1$ 个 S 族的并,加入 $\mathscr{B}$ 即为 m 个 S 族.

4.4 Littlewood-Offord 问题

1943 年,Littlewood 与 Offord 提出下面的问题:设 z_1, z_2, …, z_n 为模 $\geqslant 1$ 的复数,作出 2^n 个形如 $z_{i_1}+z_{i_2}+\cdots+z_{i_t}$ 的和, $\{i_1, i_2, \cdots, i_t\}$ 是集合 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集(对于空集,相应的和为 0). 从这些和中最多能选出多少个,每两个的差的模 <1?

1945 年,P. Erdös 首先解决了 z_1, z_2, …, z_n 为实数的情况,这就是例 1.

例 1 设 x_1, x_2, …, x_n 为 n 个绝对值不小于 1 的实数,则从 2^n 个和

$$x_A=\sum_{j\in A} x_j,\ A\subseteq X=\{1, 2, \cdots, n\}$$

中最多能选出 $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ 个,使得每两个的差小于 1.

解 如果某个 $x_j<0$, 用 $-x_j$ 代替它,并将每个集 A 换

成集

$$B=\begin{cases}A\cup\{j\},如果 j\notin A;\\ A-\{j\},如果 j\in A.\end{cases}\tag{1}$$

和 x_A 换为和

$$x_B=x_A+(-x_j).$$

于是,不妨设所有 x_j 均非负.

设 $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 为 X 的子集族,并且当 $i\neq j$ 时,

$$|x_{A_i}-x_{A_j}|<1.\tag{2}$$

若 $A_i\subset A_j$,那么

$$|x_{A_i}-x_{A_j}|=|x_{A_j-A_i}|\geqslant 1,$$

与(2)矛盾,所以 $\mathscr{A}$ 为 S 族,从而

$$t\leqslant C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}.\tag{3}$$

另一方面,当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 时,有 $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ 个 A $\left(X 的全部\left[\frac{n}{2}\right]元子集\right)$,使 $x_A=\left[\frac{n}{2}\right]$,它们的差为 0,因此(3)中等号成立.

现在设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 n 个模 $\geqslant 1$ 的向量(特别地,它们可以是平面向量即复数).为了获得与例 1 类似的结果,我们先引入两个概念.

如果 X 的全体子集所成的族 $P(X)$ 被分拆为若干个(互不相交的)族,各族的元数 $\in\left\{n+1, n-1, n-3, \cdots, n+1-2\left[\frac{n}{2}\right]\right\}$,并且其中元数为 $n+1-2i$ $\left(i=0, 1, \cdots, \left[\frac{n}{2}\right]\right)$ 的恰有 $C_n^i-C_n^{i-1}$ 个,我们称这样的分拆为对称分拆.

4.2 节中，$P(X)$被分拆为若干条对称链，每条对称链是一个子集族. 容易验证（参见下面例 2 证明的后一半）这一分拆是对称分拆. 实际上对称分拆的定义即从例 2 延伸出来.

对称分拆中，族的个数为

$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(C_n^i - C_n^{i-1}) = C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}. \tag{4}$$

对于上面所说的向量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 如果 $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集族 $\mathscr{A}$ 中任意两个子集 A, B 满足

$$|x_A - x_B| \geqslant 1, \tag{5}$$

那么 $\mathscr{A}$ 称为稀疏的.

例 2 $P(X)$有一对称分拆，其中每一个族都是稀疏的.

解 证法与 4.2 节的例 2 类似，对 n 进行归纳，奠基显然. 设命题对 $n-1$ 成立，$\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$为一个稀疏的族.

不妨设 x_n 为 x 轴上的向量. 函数 f 将一切向量 $\alpha = (x, y, z)$ 映为第一坐标 x，即 $f(\alpha) = x$.

设 $f(x_{A_1}), f(x_{A_2}), \cdots, f(x_{A_t})$中 $f(x_{A_k})$最大（若同时有几个最大的，任取其中之一），作子集族

$$\{A_1, A_2, \cdots, A_t, A_k \cup \{n\}\} \tag{6}$$

与

$$\{A_1 \cup \{n\}, \cdots, A_{k-1} \cup \{n\}, A_{k+1} \cup \{n\}, \cdots, A_t \cup \{n\}\} \tag{7}$$

（当 $t = 1$ 时仅有(6). 当 $t \geqslant 2$ 时(6)，(7)同时存在）.

(7)显然仍是稀疏的. 对(6)中的集 $A_j (1 \leqslant j \leqslant t)$，

$$\begin{aligned} |x_{A_k \cup \{n\}} - x_{A_j}| &\geqslant f(x_{A_k \cup \{n\}} - x_{A_j}) \\ &= f(x_n) + f(x_{A_k}) - f(x_{A_j}) \end{aligned}$$

$$\geqslant f(x_n) \geqslant 1,$$

所以(6)也是稀疏的.

最后,我们证明分拆是对称分拆.

原来的族$\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$的元数$t=n-2i$,新族(6),(7)的元数分别为$n+1-2i$, $n-1-2i=n+1-2(i+1)$.并且新族中元数为$n+1-2i$的有

$$(C_{n-1}^{i}-C_{n-1}^{i-1})+(C_{n-1}^{i-1}-C_{n-1}^{i-2})=C_{n}^{i}-C_{n-1}^{i-1}$$

个,所以新族是对称分拆.

本节开头所提问题的答案仍为$C_n^{[\frac{n}{2}]}$.因为每个稀疏族满足(5),其中只能选出一个子集A,从而至多有$C_n^{[\frac{n}{2}]}$个A满足每两个x_A的差的模小于1.另一方面,例1已经表明这个值$C_n^{[\frac{n}{2}]}$是能够取到的.

例3 $x_1, x_2, \cdots, x_n$为模不小于1的向量(或复数),对任意向量(或复数)x,在2^n个和$x_A=\sum\limits_{i\in A}x_i$中至多可选出多少个与$x$的差的模小于$\frac{1}{2}$?

解 若$|x_A-x|<\frac{1}{2}$, $|x_B-x|<\frac{1}{2}$,则

$$|x_A-x_B|<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1.$$

因此至多选出$C_n^{[\frac{n}{2}]}$个x_A与x的差的模小于$\frac{1}{2}$.

例4 假设同上,证明在2^n个和$\sum\limits_{i=1}^{n}\varepsilon_i x_i$($\varepsilon_i=\pm 1$)中至多可以选出$C_n^{[\frac{n}{2}]}$个与$x$的距离小于1.

解 令$y=\sum x_i$,则

$$|x-\sum\varepsilon_i x_i|=|x+y-\sum(1+\varepsilon_i)x_i|$$

$$=2\left|\frac{x+y}{2}-\sum\frac{1+\varepsilon_i}{2}x_i\right|.$$

$\frac{1+\varepsilon_i}{2}=0$ 或 1，这就化为上题.

4.5 I 族

如果集 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集族 $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 中，每两个子集 A_i，A_j 的交 $A_i\cap A_j\neq\varnothing$ $(1\leqslant i, j\leqslant t)$，那么 $\mathscr{A}$ 称为相交族或 I 族.

例 1 试求 I 族的元数的最大值.

解 I 族 $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 的元数 t 至多为 2^{n-1}.

一方面，由于 X 的 2^n 个子集可以两两配对：A 与 A 的补集 $X-A$ 配成一对，所以在 $t>2^{n-1}$ 时，$A_1, A_2, \cdots, A_t$ 中必有一个集是另一个的补集，它们的交为空集. 这表明 I 族 $\mathscr{A}$ 的元数 $t\leqslant 2^{n-1}$.

另一方面，含有 n 的子集共 2^{n-1} 个，它们组成 I 集. 所以 $\max t=2^{n-1}$.

注 1：$\max t=2^{n-1}$ 的情况并不仅有上述一种. 例如 n 为奇数时，所有元数 $\geqslant\frac{n+1}{2}$ 的子集组成的族 $\mathscr{A}$ 显然是 I 族，而且 $|\mathscr{A}|=2^{n-1}$. n 为偶数时，设 $\mathscr{B}$ 是 $\{1, 2, \cdots, n-1\}$ 的子集族，$\mathscr{B}$ 是 I 族，$|\mathscr{B}|=2^{n-2}$ 并且 $\mathscr{B}$ 中子集不全含一个固定元素. 作 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集族 $\mathscr{A}$，其中子集由 $\mathscr{B}$ 的子集添加 n 而得. 这时 $\mathscr{A}\cup\mathscr{B}$ 是 X 的 I 族，$|\mathscr{A}\cup\mathscr{B}|=2^{n-1}$，而且 $\mathscr{A}\cup\mathscr{B}$ 中子集不全含一个固定元素.

注 2：若$\mathscr{A}$为 I 族，而$|\mathscr{A}|<2^{n-1}$，则必有子集$A\notin\mathscr{A}$并且$A'\notin\mathscr{A}$. 将 A 加到$\mathscr{A}$中后若新族不为 I 族，则必有 $B\in\mathscr{A}$ 而 $A\cap B=\varnothing$. 此时，$B\subseteq A'$，从而 A' 与$\mathscr{A}$中每个集的交非空. 将 A' 加到$\mathscr{A}$中后新族为 I 族. 因此总可不断将不在$\mathscr{A}$中的集 A 或 A' 加到$\mathscr{A}$中，直至$|\mathscr{A}|=2^{n-1}$.

例 2 设 $2\leqslant r<\frac{n}{2}$. $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 为 I 族，并且 $|A_i|=r$ $(i=1, 2, \cdots, t)$. 求 t 的最大值.

解 显然，当 $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 为 X 中含有一固定元素 x 的、全部 r 元子集时，

$$t=C_{n-1}^{r-1}. \tag{1}$$

Erdös—Ko(柯召)—Rado 证明了 C_{n-1}^{r-1} 就是 t 的最大值. 即有

定理 设 $2\leqslant r<\frac{n}{2}$. $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 为 I 族，并且 $|A_i|=r$ $(i=1, 2, \cdots, t)$，则

$$t\leqslant C_{n-1}^{r-1}. \tag{2}$$

当且仅当 $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 为 X 中含有一个固定元素 x 的全体集合时，(2)中等号成立.

这个定理在集族理论中极为重要，被誉为里程碑. 它的证明也有多种，下面介绍 Katona 的证明.

我们知道 n 个数排在圆周上，有 $(n-1)!$ 种排法. 完全同样地，将圆周等分为 n 条弧，在各弧标上 n 个数 $1, 2, \cdots, n$，也有 $(n-1)!$ 种方法. 每一种，称为 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个圈.

Katona 的证法要点是将 A_j“嵌入”圈中.

如果 r 元子集 A_j 的 r 个元素标在圈 C 的 r 条连续的弧上，那么就称这 r 条弧为 A_j，并称圈 C 含子集 A_j. 由于 A_j 的 r 个

元有 $r!$ 种排列方法，不在 A_j 中的 $n-r$ 个元有 $(n-r)!$ 种排列方法，所以有 $r!(n-r)!$ 个圈含有子集 $A_j(1\leqslant j\leqslant t)$.

另一方面，如果圈 C 含集 $A_1=\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$，并且 $\overparen{P_1P_2}$，$\overparen{P_2P_3}$，…，$\overparen{P_rP_{r+1}}$ 上标的数分别为 a_1，a_2，…，a_r（P_1，P_2，…，P_n 为圆周的等分点），那么 C 上其他的集 A_j 与 A_1 有公共弧. 而对每个 $k\,(1\leqslant k\leqslant r+1)$，以 P_k 为起点的连续 r 条弧有两个（即 $\overparen{P_kP_{k+1}}$，$\overparen{P_{k+1}P_{k+2}}$，…，$\overparen{P_{k+r-1}P_{k+r}}$ 与 $\overparen{P_kP_{k-1}}$，$\overparen{P_{k-1}P_{k-2}}$，…，$\overparen{P_{k-r+1}P_{k-r}}$），这两个除 P_k 外无公共点，因此其中至多有一个是某个 $A_j\in\mathscr{A}$（每两个 A_i，$A_j\in\mathscr{A}$ 必有公共弧）. 由于以 P_1 或 P_{r+1} 为起点的连续 r 条弧，只有一个是 $\mathscr{A}$ 中的集，即 A_1. 所以，每一个圈 C 至多含 $\mathscr{A}$ 中 r 个集.

综合以上两个方面，

$$\sum_{i=1}^{t}\sum_{C含A_i}1=t\times r!\times(n-r)!$$

$$=\sum_{圈C}\sum_{A_j含于C}1\leqslant r\times(n-1)!,\qquad(3)$$

即

$$t\leqslant C_{n-1}^{r-1}.\qquad(4)$$

图 4.5.1

下面研究等号成立的情况.

在定理中已经指明当 $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 为 X 中含有一固定元素 x 的全体集合时,(2)中等号成立.

反之,设(2)中等号成立,则(3)中等号成立,从而每一圈上恰含 r 个 A_j.

对于圈 C,设分点为 $P_1, P_2, \cdots, P_n$,并且 $\widehat{P_1P_2}, \widehat{P_2P_3}, \cdots, \widehat{P_rP_{r+1}}$ 标的数分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_r$, $A_1=\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$. 根据上面所证,以 $P_k(1\leqslant k\leqslant r)$ 为起点的连续 r 条弧恰有一个是 $\mathscr{A}$ 中某个子集,不妨设就是 A_k. 这时有两种情况:

(i) 所有 $A_k(1\leqslant k\leqslant r)$ 均含有 a_r(图 4.5.2).

(ii) 有一个 h $(1\leqslant h<r)$, A_h 含有 a_r 而 A_{h+1} 不含有 a_r(这时 $A_{h+2}, \cdots, A_r$ 均不含 a_r. 图 4.5.3).

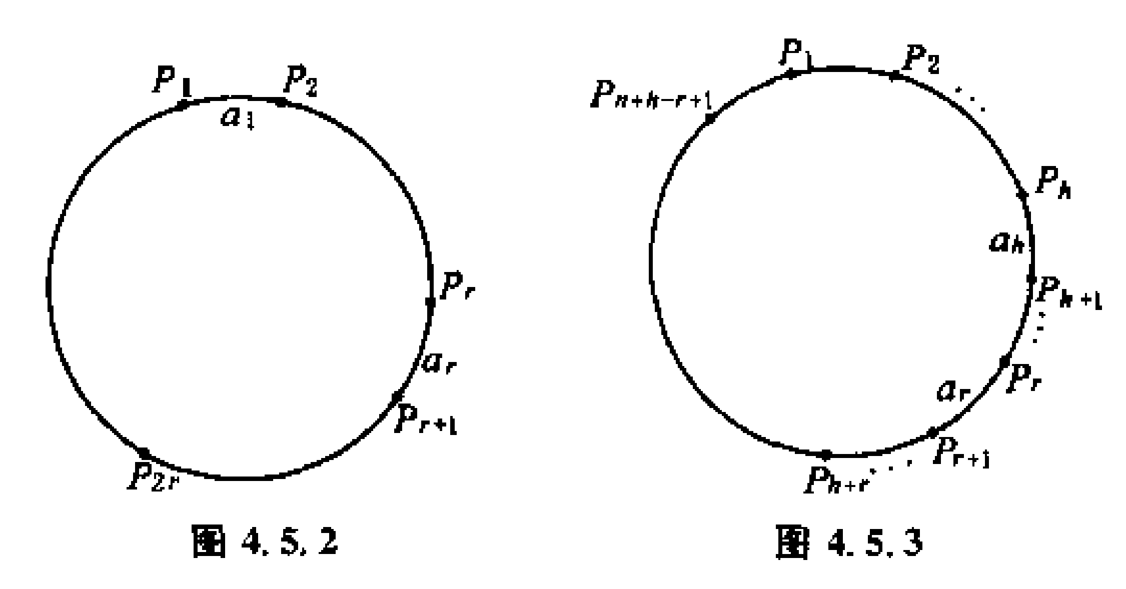


图 4.5.2　　　　图 4.5.3

无论哪一种情况,这 r 个集(所对应的弧)都只覆盖了圆周上 $2r-1$ 条弧,而不是整个圆周(因为 $n\geqslant 2r$). 这 $2r-1$ 条弧有一个起点(图 4.5.2 中是 P_1,图 4.5.3 中是 $P_{n+h-r+1}$),一个终点(图 4.5.2 中是 P_{2r},图 4.5.3 中是 P_{h+r}). 不失一般性,我们设起点为 P_1, r 个属于 $\mathscr{A}$ 的集为

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}, \{a_2, a_3, \cdots, a_{r+1}\}, \cdots,$$
$$\{a_r, a_{r+1}, \cdots, a_{2r-1}\}.$$

又设$\widehat{P_nP_1}$上标的数为 b,则

$$B = \{b, a_1, a_2, \cdots, a_{r-1}\} \notin \mathscr{A}.$$

现在证明任一含 a_r、不含 b 的 r 元子集 A_p 属于 $\mathscr{A}$.

设 A_p 中有 $r-s$ 个数 $\in \{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$. 不妨设它们是 $a_{s+1}, a_{s+2}, \cdots, a_r$(否则将 $a_1, \cdots, a_{r-1}$ 重新编号). 又设其余的数为 $c_{r+1}, c_{r+2}, \cdots, c_{r+s}$.

考虑各弧依次标上 $b, a_1, a_2, \cdots, a_r, c_{r+1}, c_{r+2}, \cdots, c_{r+s}, \cdots$ 的圈 C'.

由于 $A_1 = \{a_1, a_2, \cdots, a_r\} \in \mathscr{A}$, $B = \{b, a_1, \cdots, a_{r-1}\} \notin \mathscr{A}$, 根据上面的分析,在圈 C' 上情况 2 不会出现(否则相当于 A_{h+1} 的 $B \in \mathscr{A}$), 即必有情况 1 发生,

$$\{a_2, \cdots, a_r, c_{r+1}\}, \{a_3, \cdots, a_r, c_{r+1}, c_{r+2}\}, \cdots,$$
$$\{a_r, c_{r+1}, \cdots, c_{2r-1}\}$$

都是 $\mathscr{A}$ 中的子集. 特别地, $A_p \in \mathscr{A}$.

进一步,我们证明不含 a_r 的集 A_q 一定不属于 $\mathscr{A}$.

A_q 的补集有 $n-r \geqslant r+1$ 个元,如果这 $n-r$ 个元中有 b,将 b 去掉,再去掉若干个元,成为含 a_r 的 r 元集. 如果这 $n-r$ 个元中无 b,也可以去掉若干个元,成为含 a_r 的 r 元集. 根据上面所证,这含 a_r 的 r 元子集 $\in \mathscr{A}$. 因此 $A_q \notin \mathscr{A}$.

最后,由 $|\mathscr{A}| = C_{n-1}^{r-1}$ 及不含 a_r 的集不属于 $\mathscr{A}$ 得一切含 a_r 的集组成 $\mathscr{A}$.

因此, $|\mathscr{A}|$ 达到最大值的情况共有 n 种.

例 3 设 $n \leqslant 2r$, $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 为 I 族,并且 $|A_i| = r$ $(i = 1, 2, \cdots, t)$. 求 t 的最大值.

解 当 $n<2r$ 时，X 的每两个 r 元子集均相交，所以 $\mathscr{A}$ 可由 X 的全部 r 元子集组成，$\max|\mathscr{A}|=C_n^r$.

当 $n=2r$ 时，X 的 r 元子集两两互补，因为每两个互补的集至多有一个属于 $\mathscr{A}$，所以 $|\mathscr{A}|\leqslant\frac{1}{2}C_n^r=C_{n-1}^{r-1}$，即(2)仍然成立. 如果在每两个互补的 r 元集中取出一个组成 $\mathscr{A}$，那么 $|\mathscr{A}|=\frac{1}{2}C_n^r=C_{n-1}^{r-1}$，并且 $\mathscr{A}$ 中每两个子集均有公共元(因为这两个集不互补). 即 $\max|\mathscr{A}|=C_{n-1}^{r-1}$，并且达到最大值的情况共有 $2^{C_{n-1}^{r-1}}$ 种.

Erdös、柯召、Rado 的论文在 1938 年已基本完成，但 1961 年才发表于 Quarterly Journal. 在这篇论文中，不仅有上面的定理，而且还提了很多的问题. 这些问题已被其他数学家(Deza, Frankl, Katona 等)逐一解决，只遗留下一个，即

猜测 设 $|X|=4m$, $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$, $|A_i|=2m\ (1\leqslant i\leqslant t)$, $|A_i\cap A_j|\geqslant 2\ (1\leqslant i, j\leqslant t)$，则

$$\max t=\frac{1}{2}(C_{4m}^{2m}-(C_{2n}^{n})^2).$$

Erdös 提供 250 英镑，奖赏解决上述猜测(证明或推翻)的人. Erdös 孤身一人，四海为家，经常提供悬奖的数学问题，但他的收入并不甚丰，悬奖通常在 10～100 美元. 250 英镑对于他，已经是一大笔钱. 这正表明 Erdös 重视这个问题，并且问题的难度甚大.

4.6 EKR 定理的推广

上节的 Erdös—柯召—Rado 定理简记为 EKR 定理，它

有很多推广. 例 1、例 2 去掉 $|A_i|$ 全相等的限制，例 3 去掉 $|A_i| \leqslant \frac{n}{2}$.

例 1 设 n 元集 X 的子集族 $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 为 I 族，并且对每个 $i\ (1 \leqslant i \leqslant t)$，$|A_i| \leqslant r \leqslant \frac{n}{2}$. 若 $\mathscr{A}$ 又是 S 族. 证明：

$$t \leqslant C_{n-1}^{r-1}. \tag{1}$$

解 由 4.2 例 2，X 的全体子集所成的族 $P(X)$ 可以分拆为对称链. 因为 $\mathscr{A}$ 是 S 族，$A_1, A_2, \cdots, A_t$ 属于不同的链. 将每个 A_i 用链中的 r 元集 B_i 代替（当 $|A_i| = r$ 时，$B_i = A_i$）. 显然 $B_1, B_2, \cdots, B_t$ 仍为 I 族，根据 EKR 定理，(1)成立.

例 2 条件同例 1，证明：

$$\sum_{i=1}^{t} \frac{1}{C_{n-1}^{|A_i|-1}} \leqslant 1. \tag{2}$$

解 首先注意在上节例 2 的证明中，可以得出若圈 C 含 $\mathscr{A}$ 中的集 A_1，则 C 至多含 $\mathscr{A}$ 中 $|A_1|$ 个子集.

在那里曾考虑和

$$\sum_{i=1}^{t} \sum_{C 含 A_i} 1 = \sum_{C} \sum_{A_j 含于 C} 1. \tag{3}$$

现在考虑一个类似的“加权”和

$$\sum_{i=1}^{t} \frac{1}{|A_i|} \sum_{C 含 A_i} 1 = \sum_{C} \sum_{A_i 含于 C} \frac{1}{|A_i|}. \tag{4}$$

由上面所说，设 A_j 含于 C 且 $|A_j|$ 最小，则

$$\sum_{A_i 含于 C} \frac{1}{|A_i|} \leqslant \frac{1}{|A_j|} \cdot |A_j| = 1,$$

于是(4)的右边 $\leqslant \sum_{C} 1 = (n-1)!$.

$$(4)\text{的左边} = \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{|A_i|} \cdot |A_i|! \cdot (n-|A_i|)!$$

$$= \sum_{i=1}^{t} \frac{(n-1)!}{C_{n-1}^{|A_i|-1}}.$$

结合以上两方面即得(2).

由于 $|A_i| \leqslant r \leqslant \frac{n}{2}$ 时, $C_{n-1}^{|A_i|-1}$ 随 $|A_i|$ 递增. 所以由(2)可得 $\sum_{i=1}^{t} \frac{1}{C_{n-1}^{r-1}} \leqslant 1$, 即(1)成立.

例 3 设 $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 是 n 元集的子集族, 若 $\mathscr{A}$ 既是 I 族又是 S 族. 证明:

$$|\mathscr{A}| \leqslant C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}. \tag{5}$$

解 首先证明一个不等式

$$\sum_{\substack{A \in \mathscr{A} \\ |A| \leqslant \frac{n}{2}}} \frac{1}{C_n^{|A|-1}} + \sum_{\substack{A \in \mathscr{A} \\ |A| > \frac{n}{2}}} \frac{1}{C_n^{|A|}} \leqslant 1. \tag{6}$$

为此引进一个权函数 $f(C, A_i)$:

$$f(C, A_i) = \begin{cases} \dfrac{n-|A_i|+1}{|A_i|}, & \text{若 } |A_i| \leqslant \dfrac{n}{2}, \text{并且圈 } C \text{ 含 } A_i; \\ 1, & \text{若 } |A_i| > \dfrac{n}{2}, \text{并且圈 } C \text{ 含 } A_i; \\ 0, & \text{若圈 } C \text{ 不含 } A_i. \end{cases}$$

这里圈 C 含 A_i 的意义与上节例 2 相同.

$$\sum_{i=1}^{t} \sum_{C} f(C, A_i)$$

$$
= \sum_{|A_i| \leqslant \frac{n}{2}} \frac{n - |A_i| + 1}{|A_i|} \sum_{C \text{含} A_i} 1 + \sum_{|A_i| > \frac{n}{2}} \sum_{C \text{含} A_i} 1
$$

$$
= \sum_{|A_i| \leqslant \frac{n}{2}} \frac{n - |A_i| + 1}{|A_i|} |A_i|!(n - |A_i|)!
$$

$$
+ \sum_{|A_i| > \frac{n}{2}} |A_i|!(n - |A_i|)!
$$

$$
= n!\Big(\sum_{\substack{A \in \mathscr{A} \\ |A| \leqslant \frac{n}{2}}} \frac{1}{C_n^{|A|-1}} + \sum_{\substack{A \in \mathscr{A} \\ |A| > \frac{n}{2}}} \frac{1}{C_n^{|A|}} \Big). \tag{7}
$$

另一方面，我们可以证明对每个圈 C，

$$
\sum_{i=1}^{t} f(C, A_i) = \sum_{\substack{|A_i| \leqslant \frac{n}{2} \\ A_i \in C}} \frac{n - |A_i| + 1}{|A_i|} + \sum_{\substack{|A_i| > \frac{n}{2} \\ A_i \in C}} 1 \leqslant n. \tag{8}
$$

事实上，不妨设圈 C 上标的数顺次为 $1, 2, \cdots, n$. 若所有 $|A_i| > \frac{n}{2}$，因为 $\mathscr{A}$ 是 S 族，所以 $\mathscr{A}$ 中以 j 为“第一个元素”的形如 $\{j, j+1, \cdots, k$ (约定 $n+b=b$)$\}$ 的集至多只有一个. 从而含于 C 的 A_i 至多 n 个，即(8)成立. 若有 $|A_i| \leqslant \frac{n}{2}$. 不妨设 $A_1 = \{1, 2, \cdots, r\}$ 的元数 r 最小. 这时 $\mathscr{A}$ 中其他子集 A_i 或者以某个 j $(2 \leqslant j \leqslant r)$ 为第一元素或者以 $j-1$ $(2 \leqslant j \leqslant r)$ 为最后元素，并且以 j 为第一元素或以 $j-1$ 为最后元素的 A_i 均至多一个(因为 $\mathscr{A}$ 是 S 族). 若两者均有，则它们应有公共元(因为 $\mathscr{A}$ 是 I 族)，从而其中必有一个元数 $> \frac{n}{2}$. 它们的权的和(注意 r 的最小性)

$$
\leqslant \frac{n - r + 1}{r} + 1 = \frac{n+1}{r},
$$

因此(8)式左边$\leqslant \frac{n-r+1}{r}+(r-1)\times\frac{n+1}{r}=n$.

由(8),

$$\sum_{C}\sum_{i=1}^{t} f(C, A_i)\leqslant n\times(n-1)!=n!. \qquad (9)$$

综合(7),(9)即得(6).

因为$|A|\leqslant\frac{n}{2}$时,$C_n^{|A|-1}\leqslant C_n^{[\frac{n}{2}]-1}\leqslant C_n^{[\frac{n}{2}]+1}$;$|A|>\frac{n}{2}$时,$C_n^{|A|}\leqslant C_n^{[\frac{n}{2}]+1}$;所以由(6)得

$$\sum_{A\in\mathscr{A}}\frac{1}{C_n^{[\frac{n}{2}]+1}}\leqslant 1,$$

即(5)成立.

在$\mathscr{A}$由全体$\left[\frac{n}{2}\right]+1$元集组成时,(5)成为等式. 因此上界$C_n^{[\frac{n}{2}]+1}$是最佳的.

例 4 集族$\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$既是$S$集又是$I$集,并且每两个$A_i$, A_j的并集不是X. 证明:

$$t\leqslant C_{n-1}^{[\frac{n}{2}]-1}. \qquad (10)$$

解 考虑$A_1, A_2, \cdots, A_t$及其补集$A_1', A_2', \cdots, A_t'$.

因为$\mathscr{A}$是I族,所以$A_i\cap A_j\neq\varnothing$,从而$A_i$与$A_j'$互不包含.

因为$\mathscr{A}$是S族,A_i与$A_j(i\neq j)$互不包含,从而A_i'与A_j'互不包含,$A_i\cap A_j'\neq\varnothing$.

因为$A_i\cup A_j\neq X$,所以$A_i'\cap A_j'\neq\varnothing$.

将$\{A_1, A_2, \cdots, A_t, A_1', A_2', \cdots, A_t'\}$分拆为两个集族

$\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$. $\mathscr{B}$ 中的集元数均 $\leqslant \frac{n}{2}$，并且在 $|A_t| = \frac{n}{2}$ 时，A_t 与 A_t' 恰有一个在 $\mathscr{B}$ 中.

根据上面所述，$\mathscr{B}$ 是 I 族，也是 S 族，从而由例 2，

$$\sum_{B \in \mathscr{B}} \frac{1}{C_{n-1}^{|B|-1}} \leqslant 1. \tag{11}$$

(11)中的 $|B| \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$，所以 $C_{n-1}^{|B|-1} \leqslant C_{n-1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}$. 而 $\mathscr{B}$ 中子集恰 t 个，所以(11)导出(10).

4.7 影

设 $\mathscr{A}$ 是 n 元集 X 的子集族，并且 $\mathscr{A}$ 中的子集都是 l 元子集. 集族

$$\{B: |B| = l-1 \text{ 并且 } B \text{ 是 } \mathscr{A} \text{ 中某个集的子集}\}$$

称为 $\mathscr{A}$ 的影子或影，记为 $\Delta\mathscr{A}$, $\Delta\{A\}$ 简记为 ΔA.

在 4.1 节例 1 的第二个证明中实际上已经得到

$$|\Delta\mathscr{A}| \geqslant \frac{l}{n-l+1} |\mathscr{A}| \tag{1}$$

(l 即那里的 s). 为了得出更精确的关系，需要引进一些记号与概念.

例 1 证明对任意的自然数 t, l，存在自然数 $a_l > a_{l-1} > \cdots > a_m \geqslant m$，使得

$$t = C_{a_l}^{l} + C_{a_{l-1}}^{l-1} + \cdots + C_{a_m}^{m}, \tag{2}$$

并且这种表示是唯一的.

解 $t = 1$ 时，有唯一的表示 $t = C_l^l (a_l = l)$.

如果 t 有所述的表示，那么

$$
\begin{aligned}
C_{a_l}^l \leqslant t &< C_{a_l}^l + C_{a_{l-1}}^{l-1} + \cdots + C_{a_{m+1}}^{m+1} + C_{a_{m+1}}^m \\
&\leqslant C_{a_l}^l + C_{a_{l-1}}^{l-1} + \cdots + C_{a_{m+2}}^{m+2} + C_{a_{m+2}}^{m+1} \\
&\leqslant \cdots \\
&\leqslant C_{a_l}^l + C_{a_l}^{l-1} \\
&= C_{a_l+1}^l,
\end{aligned}
$$

从而 a_l 是满足 $C_x^l \leqslant t$ 的最大整数 x，被 l，t 唯一确定.

取定 a_l 为满足 $C_x^l \leqslant t$ 的最大整数 x 后，

$$t - C_{a_l}^l < C_{a_l+1}^l - C_{a_l}^l = C_{a_l}^{l-1}.$$

因此满足 $C_x^{l-1} \leqslant t - C_{a_l}^l$ 的最大整数 $a_{l-1} < a_l$，a_{l-1} 也是唯一确定的. 依此类推，可唯一地定出 t 的表达式(2).

(2)称为 t 的 l-二项式表示.

例 2 设 $\mathscr{A}$ 为 $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集族，对 $1 < j \leqslant n$，定义集 A 的位移

$$
S_j(A) = \begin{cases} (A - \{j\}) \cup \{1\}, & \text{若 } j \in A,\ 1 \notin A, \\ & (A - \{j\}) \cup \{1\} \notin \mathscr{A}; \\ A, & \text{其他情况}. \end{cases}
$$

及 $\mathscr{A}$ 的位移

$$S_j(\mathscr{A}) = \{S_j(A) : A \in \mathscr{A}\}.$$

证明：

(i) $\Delta(S_j(\mathscr{A})) \subseteq S_j(\Delta\mathscr{A})$；　　(3)

(ii) $|\Delta\mathscr{A}| \geqslant |\Delta(S_j(\mathscr{A}))|$.　　(4)

解 设 $A \in \mathscr{A}$. 要证明 $\Delta(S_j(A)) \subseteq S_j(\Delta\mathscr{A})$.

若 $A=S_j(A)$，则对任一 $B\in\Delta(S_j(A))=\Delta(A)$，均有 $A=B\cup\{i\}$. 由 $S_j(\Delta\mathscr{A})$的定义，$B=S_j(B)$（这里 S_j 是 $\Delta\mathscr{A}$ 的位移，不是 $\mathscr{A}$ 的位移），除非 $j\in B$，$1\notin B$ 而且 $(B-\{j\})\cup\{1\}\notin\Delta\mathscr{A}$. 但 $j\in B$，$1\notin B$ 时，$i\neq j$. 在 $i=1$ 时，$(B-\{j\})\cup\{1\}=A-\{j\}\in\Delta\mathscr{A}$. 在 $i\neq1$ 时，$j\in A$，$1\notin A$，由于 $A=S_j(A)$，必有 $(A-\{j\})\cup\{1\}\in\mathscr{A}$，从而仍有 $(B-\{j\})\cup\{1\}\in\Delta\mathscr{A}$. 因此总有 $B=S_j(B)\in S_j(\Delta\mathscr{A})$.

若 $A\neq S_j(A)$，则 $j\in A$，$1\notin A$，$S_j(A)=(A-\{j\})\cup\{1\}$. 对任一 $B\in\Delta(S_j(A))$ 有 $B=(A-\{j\})\cup\{1\}-\{i\}$，$i\in(A-\{j\})\cup\{1\}$. 当 $i=1$ 时，$B=A-\{j\}=S_j(A-\{j\})\in S_j(\Delta\mathscr{A})$. 当 $i\neq1$ 时，又分两种情况：1° $B\in\Delta\mathscr{A}$. 由于 $j\notin B$，显然 $B=S_j(B)\in S_j(\Delta\mathscr{A})$. 2° $B\notin\Delta\mathscr{A}$，即 $((A-\{i\})-\{j\})\cup\{1\}\notin\Delta\mathscr{A}$，此时 $B=((A-\{i\})-\{j\})\cup\{1\}=S_j(A-\{i\})\in S_j(\Delta\mathscr{A})$.

因此恒有 $A\in\mathscr{A}$ 时，$\Delta(S_j(A))\subseteq S_j(\Delta\mathscr{A})$. 从而(3)成立.

显然，$\mathscr{A}$ 中任意两个集 A_1，A_2 经位移后仍不相同. 所以

$$|\Delta\mathscr{A}|=|S_j(\Delta\mathscr{A})|\geqslant|\Delta(S_j(\mathscr{A}))|.$$

现在可以介绍本节的主要内容.

例 3 设 $\mathscr{A}=\{A_1,A_2,\cdots,A_t\}$ 为 X 的 l 元子集的族，t 的 l-二项式表示为

$$t=C_{a_l}^{l}+C_{a_{l-1}}^{l-1}+\cdots+C_{a_m}^{m},\tag{5}$$

$a_l>a_{l-1}>\cdots>a_m\geqslant m$，则

$$|\Delta\mathscr{A}|\geqslant C_{a_l}^{l-1}+C_{a_{l-1}}^{l-2}+\cdots+C_{a_m}^{m-1}.\tag{6}$$

这一结论称为 Kruskal-Katona 定理.

解 对 $\mathscr{A}$ 施行移位运算 S_j，$j=2,3,\cdots,n$，使含 1 的

集个数增加. 这样进行有限多次后，必有 $S_j(\mathscr{A})=\mathscr{A}$ 对所有 $j\geqslant 2$ 均成立. 由例 2(3)，在这过程中 $|\Delta\mathscr{A}|$ 不增. 因此不妨假设 $S_j(\mathscr{A})=\mathscr{A}$ 对所有 $j\geqslant 2$ 均已成立. 令

$$\mathscr{A}_1=\{A:A\in\mathscr{A},\ 1\notin A\},$$
$$\mathscr{A}_2=\{A-\{1\},\ A\in\mathscr{A},\ 1\in A\}.$$

对任一 $B\in\Delta\mathscr{A}_1$，有 $i>1$ 使 $B\cup\{i\}\in\mathscr{A}_1$. 从而必有 $B\cup\{1\}\in\mathscr{A}$(否则 $B\cup\{1\}=S_i(B\cup\{i\})\in S_i(\mathscr{A})=\mathscr{A}$, 矛盾). 因此 $B\in\mathscr{A}_2$，从而

$$|\mathscr{A}_2|\geqslant|\Delta\mathscr{A}_1|. \tag{7}$$

当 $l=1$ 及 $l=n$ 时结论显然成立(前者 $\Delta\mathscr{A}=\varnothing$, $|\Delta\mathscr{A}|=C_t^0=1$. 后者 $t=1$, $\Delta\mathscr{A}$ 由所有 $n-1$ 元集组成, $|\Delta\mathscr{A}|=C_n^{n-1}=n-1$). 假设结论对 $n<k$ 成立，并且对 $n=k$ 且 $l<h$ 也成立. 考虑 $n=k$, $l=h$ 的情况.

若 $|\mathscr{A}_2|<C_{a_l-1}^{l-1}+\cdots+C_{a_m-1}^{m-1}$，则

$$\begin{aligned}|\mathscr{A}_1|&=|\mathscr{A}|-|\mathscr{A}_2|\\&>(C_{a_l}^{l}-C_{a_l-1}^{l-1})+\cdots+(C_{a_m}^{m}-C_{a_m-1}^{m-1})\\&=C_{a_l-1}^{l}+\cdots+C_{a_m-1}^{m}.\end{aligned}$$

由归纳假设，

$$|\Delta\mathscr{A}_1|\geqslant C_{a_l-1}^{l-1}+\cdots+C_{a_m-1}^{m-1},$$

从而 $|\Delta\mathscr{A}_1|>|\mathscr{A}_2|$，与(7)矛盾. 因此

$$|\mathscr{A}_2|\geqslant C_{a_l-1}^{l-1}+\cdots+C_{a_m-1}^{m-1}. \tag{8}$$

由归纳假设，

$$|\Delta\mathscr{A}_2|\geqslant C_{a_l-1}^{l-2}+\cdots+C_{a_m-1}^{m-2}. \tag{9}$$

(8)，(9)相加得

$$|\mathscr{A}_2|+|\Delta\mathscr{A}_2|\geqslant C_{a_l}^{l-1}+\cdots+C_{a_m}^{m-1}. \tag{10}$$

因为 $\Delta\mathscr{A}_2$ 中任一子集添加 1 后成为 $\Delta\mathscr{A}$ 中子集，并且不同的子集添加 1 后各不相同. 这些子集与 $\mathscr{A}_2$ 中子集(不含 1)不同. 所以

$$|\Delta\mathscr{A}|\geqslant|\mathscr{A}_2|+|\Delta\mathscr{A}_2|. \tag{11}$$

(10)，(11)导出(6).

4.8 Milner 定 理

若 n 元集 X 的子集族 $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 是 S 族，并且 $\mathscr{A}$ 中任两个集 A_i, A_j 均有 $|A_i\cap A_j|\geqslant k$, Milner 在 1968 年证明了

$$|\mathscr{A}|\leqslant C_n^{\left[\frac{n+k-1}{2}\right]}. \tag{1}$$

我们分三步来证明(1)，即下面的例 1～例 3.

例 1 设 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集族 $\mathscr{A}$ 为 I 族. 对 $1<j\leqslant n$ 及 $A\in\mathscr{A}$, 定义位移

$$S_j(A)=\begin{cases}(A-\{1\})\cup\{j\}, & \text{若 } 1\in A,\ j\notin A,\\ & (A-\{1\})\cup\{j\}\notin\mathscr{A};\\ A, & \text{其他情况.}\end{cases}$$

则 $S_j(\mathscr{A})=\{S_j(A): A\in\mathscr{A}\}$ 仍为 I 族，并且

$$|\Delta\mathscr{A}|\geqslant|\Delta(S_j(\mathscr{A}))|. \tag{2}$$

解 $S_j(A)$实际上与上节相同，只不过将元素的标号 1 与 j 互换. 因此(2)即上节的(4)，无用再证.

为了证明 $S_j(\mathscr{A})$是 I 族，设 A_1, $A_2\in\mathscr{A}$, 往证 $S_j(A_1)\cap$

$S_j(A_2) \neq \varnothing$. 显然只需考虑 $S_j(A_1) = A_1$, $S_j(A_2) = (A_2 - \{1\}) \cup \{j\}$ 的情况. 设 $a \in A_1 \cap A_2$, 若 $a \neq 1$, 则 $a \in S_j(A_1) \cap S_j(A_2)$. 若 $a = 1$, $j \in A_1$, 则 $j \in S_j(A_1) \cap S_j(A_2)$. 若 $a = 1$, $j \notin A_1$, 则由于 $S_j(A_1) = A_1$, 必有 $(A_1 - \{1\}) \cup \{j\} \in \mathscr{A}$. $\mathscr{A}$ 是 I 族, 必有 $y \in A_2 \cap ((A_1 - \{1\}) \cup \{j\})$. 显然 $y \neq 1$. 因为 $j \notin A_2$, $y \neq j$. 从而 $y \in S_j(A_1) \cap S_j(A_2)$.

例 2 若 $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 是 I 族, 并且 $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 都是 n 元集 X 的 l 元子集, 则

$$|\Delta\mathscr{A}| \geqslant |\mathscr{A}|. \tag{3}$$

解 $n = 1$ 时(3)显然成立. 假设(3)对 $n-1(\geqslant 1)$ 成立.

若 $l \geqslant \frac{1}{2}(n+1)$, 由 4.2 节例 2, 将 $P(X)$ 分解为对称链, 每个 $A_i(1 \leqslant i \leqslant t)$ 在一条链中, 这条链中有一个比 A_i 恰少一个元的集 B_i. 这些 $B_i(1 \leqslant i \leqslant t)$ 互不相同(在不同的链中), 因此(3)成立.

以下设 $l \leqslant \frac{1}{2}n$.

若 $l = 1$, 则 $t = 1$, $|\Delta\mathscr{A}| = |\mathscr{A}|$.

若 $l = 2$, $t = 1$, 则 $|\Delta\mathscr{A}| = 2 > |\mathscr{A}|$. 若 $l = 2$, $t \geqslant 2$, 又有两种情况: 1° X 的每个元素至多属于两个 $\mathscr{A}$ 中子集. 设 $A_1 = \{a, b\}$, $A_2 = \{a, c\}$, 则由于 $\mathscr{A}$ 是 I 族, 至多还有一个集, 即 $\{b, c\} \in \mathscr{A}$. 从而 $|\Delta\mathscr{A}| = 3 \geqslant |\mathscr{A}|$. 2° X 的元素 $a \in A_1 \cap A_2 \cap A_3$. 由于 $\mathscr{A}$ 是 I 族, 任一 $\mathscr{A}$ 中的集 A_j 含有 a(否则二元集 A_j 不可能与 A_1、A_2、A_3 均有公共元). 于是 $|\Delta\mathscr{A}| = 1 + |\mathscr{A}| > |\mathscr{A}|$.

设 $l > 2$ 并且将 l 换为较小的自然数时(3)成立.

对 $\mathscr{A}$ 重复施用位移 $S_j(j = 2, 3, \cdots, n)$, 使得含 1 的集

减少，经有限多步后，不再产生新的集. 由例 1，新的集族仍为 I 族并有不等式(2). 不妨假定 $S_j(\mathscr{A})=\mathscr{A}$, $j=2, 3, \cdots, n$.

如果 1 不属于 $\mathscr{A}$ 中任一个集，那么 $\mathscr{A}$ 是 $n-1$ 元集 $\{2, 3, \cdots, n\}$ 的子集族，从而(3)成立.

设 1 属于 $A_1, A_2, \cdots, A_s$，不属于 $A_{s+1}, \cdots, A_t$. 令 $B_i=A_i-\{1\}$, $i=1, 2, \cdots, s$. 因为 $l\leqslant\frac{1}{2}n$，所以 $|A_1\cup A_2|\leqslant 2l-1<n$. 即有 X 的元素 $j\notin A_1\cup A_2$，但 $S_j(A_1)=A_1$，所以 $(A_1-\{1\})\cup\{j\}\in\mathscr{A}$，即 $B_1\cup\{j\}\in\mathscr{A}$. 因此 $|B_1\cap B_2|=|(B_1\cup\{j\})\cap B_2|=|(B_1\cup\{j\})\cap A_2|\geqslant 1$. 同理 $B_1, B_2, \cdots, B_s$ 中每两个的交非空. 因此 $\mathscr{B}=\{B_1, B_2, \cdots, B_s\}$ 是 I 族，由关于 l 的归纳假设

$$|\Delta\mathscr{B}|\geqslant|\mathscr{B}|. \tag{4}$$

$\{2, 3, \cdots, n\}$ 的子集族 $\mathscr{C}=\{A_{s+1}, A_{s+2}, \cdots, A_t\}$ 也是 I 族，因此由关于 n 的归纳假设

$$|\Delta\mathscr{C}|\geqslant|\mathscr{C}|. \tag{5}$$

由(4)，(5)得

$$|\Delta\mathscr{A}|\geqslant|\Delta\mathscr{B}|+|\Delta\mathscr{C}|\geqslant|\mathscr{B}|+|\mathscr{C}|=|\mathscr{A}|.$$

例 2 是 Katona 1964 年发现的定理.

例 3 证明(1)式成立.

解 记 $l=\left[\frac{n+k+1}{2}\right]$. 若 $\mathscr{A}$ 中所有 A_i 满足 $|A_i|=l$，(1)显然成立. 若 $\mathscr{A}$ 中有元数 $<l$ 的集，不妨设 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ 的元数最少，均为 h 元集，$h<l$. 考虑集族

$\mathscr{B}=\{B: B$ 为 X 的 $h+1$ 元子集并且至少包含一个 A_i, $1\leqslant i\leqslant s\}$.

显然 $\mathscr{B}\cup\{A_{s+1},\cdots,A_t\}$ 仍为 S 族．并且其中任两个集的交集至少有 k 个元．

由于 $|A_1\cap A_2|\geqslant k$，所以 $|A_1\cup A_2|\leqslant 2h-k$，$|A_1'\cap A_2'|\geqslant n-2h+k\geqslant n-2l+k+2\geqslant 1$. 从而 A_1'，A_2'，$\cdots$，A_s' 是 I 族. 由例 2，

$$|\Delta(\{A_1',A_2',\cdots,A_s'\})|\geqslant|\{A_1',A_2',\cdots,A_s'\}|=s. \tag{6}$$

而 $\Delta(\{A_1',A_2',\cdots,A_s'\})$ 正好是 $\mathscr{B}$ 中各集的补集所成的族. 因此(6)表明 $|\mathscr{B}|\geqslant s$.

对族 $\mathscr{B}\cup\{A_{s+1},\cdots,A_t\}$ 进行同样处理，直至每个集的元数都 $\geqslant l$. 在这过程中 $|\mathscr{A}|$ 不减. 因此可设 $\mathscr{A}$ 中每个集的元数 $\geqslant l$.

将 $P(X)$ 分解为对称链. 因为 $\mathscr{A}$ 为 S 族，$\mathscr{A}$ 中各集在不同的链上. 因为 $l>\frac{n}{2}$，每个元数大于 l 的集均可换成同一条链上的元数为 l 的集. 这样 $|\mathscr{A}|$ 不减少. 从而 $|\mathscr{A}|\leqslant C_n^l$，即(1)成立.

例 3 中的 $\mathscr{B}$ 称为 $\mathscr{A}=\{A_1,A_2,\cdots,A_s\}$ 的荫. 荫与影是一对对偶的概念，它在 4.1 节例 1 的第二个解法中业已出现过.

4.9 上族与下族

设 $\mathscr{A}$ 是 X 的集族. 若 $\mathscr{A}$ 具有性质：

$$A\in\mathscr{A},\ B\subset A\Rightarrow B\in\mathscr{A}, \tag{1}$$

则称 $\mathscr{A}$ 为下族. 类似地，若 $\mathscr{A}$ 具有性质：

$$A \in \mathscr{A},\ B \supset A \Rightarrow B \in \mathscr{A}, \tag{2}$$

则称 $\mathscr{A}$ 为上族.

显然 $\mathscr{A}$ 为上(下)族,当且仅当

$$\mathscr{A}' = \{A' : A \in \mathscr{A}\} \tag{3}$$

为下(上)族.

若 $\mathscr{A}$ 为上族,则 $\mathscr{A}$ 中的最小元(即不包含 $\mathscr{A}$ 中其他元的元)组成 S 族. 若 $\mathscr{A}$ 为下族,则 $\mathscr{A}$ 中的最大元(即不被 $\mathscr{A}$ 中其他元包括的元)组成 S 族.

例 1 若 $\mathscr{U}$ 是 n 元集 X 的上族,$\mathscr{D}$ 是 X 的下族,则

$$|\mathscr{U}| \cdot |\mathscr{D}| \geqslant 2^n |\mathscr{U} \cap \mathscr{D}|. \tag{4}$$

解 当 $n = 1$ 时,$\mathscr{U}$ 只有两种可能,即

$$\{\{1\}\} 或 \{\{1\}, \varnothing\}.$$

$\mathscr{D}$ 也仅有两种可能,即

$$\{\varnothing\} 或 \{\{1\}, \varnothing\}.$$

不难验证(4)均成立.

假设将 n 换成 $n-1$ 时,(4)成立. 考虑 n 的情况.

将集族 $\mathscr{U}$ 分拆为集族 $\mathscr{U}_1$,$\mathscr{U}_2$,其中 $\mathscr{U}_1$ 由 $\mathscr{U}$ 中含 n 的那些集组成,$\mathscr{U}_2$ 由 $\mathscr{U}$ 中不含 n 的集组成. 由于 $\mathscr{U}$ 是上族,所以

$$|\mathscr{U}_1| \geqslant |\mathscr{U}_2|. \tag{5}$$

($\mathscr{U}_2$ 中每个集增添 n 后成为 $\mathscr{U}_1$ 中的集.)

同样,将 $\mathscr{D}$ 分拆为 $\mathscr{D}_1$,$\mathscr{D}_2$,其中 $\mathscr{D}_1$ 中的集含 n,$\mathscr{D}_2$ 中的集不含 n. 由于 $\mathscr{D}$ 为下族,所以

$$|\mathscr{D}_2| \geqslant |\mathscr{D}_1|. \tag{6}$$

由(5),(6)及归纳假设

$$
\begin{aligned}
&|\mathscr{U}|\cdot|\mathscr{D}|=(|\mathscr{U}_1|+|\mathscr{U}_2|)(|\mathscr{D}_1|+|\mathscr{D}_2|)\\
=&|\mathscr{U}_1|\cdot|\mathscr{D}_1|+|\mathscr{U}_2|\cdot|\mathscr{D}_2|+|\mathscr{U}_1|\cdot|\mathscr{D}_2|+|\mathscr{U}_2|\cdot|\mathscr{D}_1|\\
=&|\mathscr{U}_1|\cdot|\mathscr{D}_1|+|\mathscr{U}_2|\cdot|\mathscr{D}_2|+|\mathscr{U}_1|\cdot|\mathscr{D}_1|+|\mathscr{U}_2|\cdot|\mathscr{D}_2|\\
&+(|\mathscr{U}_1|-|\mathscr{U}_2|)(|\mathscr{D}_2|-|\mathscr{D}_1|)\\
\geqslant&2(|\mathscr{U}_1|\cdot|\mathscr{D}_1|+|\mathscr{U}_2|\cdot|\mathscr{D}_2|)\\
\geqslant&2(2^{n-1}|\mathscr{U}_1\cap\mathscr{D}_1|+2^{n-1}|\mathscr{U}_2\cap\mathscr{D}_2|)\\
=&2^n|\mathscr{U}\cap\mathscr{D}|.
\end{aligned}
$$

(4) 称为 Kleitman 引理. 1966 年创办的杂志 Journal of Combinatorial Theory，在第一期上刊登了 Kleitman 的这个结果. 这个引理应用极多. 由它引出了一系列的结论.

例 2 若 $\mathscr{D}$, $\mathscr{A}$ 都是 n 元集 X 的下族，则

$$|\mathscr{D}|\cdot|\mathscr{A}|\leqslant 2^n|\mathscr{A}\cap\mathscr{D}|. \tag{7}$$

解 令 $\mathscr{U}=P(X)-\mathscr{A}$, 则 $\mathscr{U}$ 为上族. 事实上，设 $A\in\mathscr{U}$, 而 $B\supseteq A$, 则在 $B\notin\mathscr{U}$ 时，$B\in\mathscr{A}$, 从而 $A\in$ 下族 $\mathscr{A}$, 与 $A\in\mathscr{U}$ 矛盾. 所以 $B\in\mathscr{U}$, $\mathscr{U}$ 为上族.

由例 1，

$$|\mathscr{U}|\cdot|\mathscr{D}|\geqslant 2^n|\mathscr{U}\cap\mathscr{D}|,$$

即

$$(2^n-|\mathscr{A}|)\cdot|\mathscr{D}|\geqslant 2^n(|\mathscr{D}|-|\mathscr{A}\cap\mathscr{D}|),$$

从而(7)成立.

类似地，若 $\mathscr{U}$, $\mathscr{B}$ 都是上族，则

$$|\mathscr{U}|\cdot|\mathscr{B}|\leqslant 2^n|\mathscr{U}\cap\mathscr{B}|. \tag{8}$$

例 3 若 $\mathscr{A}$ 是 I 族，并且 $\mathscr{A}$ 中任两个元 A, B 的并集不等于 X. 证明：

$$|\mathscr{A}|\leqslant 2^{n-2}. \tag{9}$$

解 令

$$\mathscr{U}=\{B:B\supseteq\mathscr{A}\text{中某个集}A\},$$

$$\mathscr{D}=\{B:B\subseteq\mathscr{A}\text{中某个集}A\},$$

则 $\mathscr{U}$ 为上族，$\mathscr{D}$ 为下族，$\mathscr{U}\cap\mathscr{D}=\mathscr{A}$. 由例 1，

$$|\mathscr{U}|\cdot|\mathscr{D}|\geqslant 2^n\cdot|\mathscr{A}|. \tag{10}$$

因为 $\mathscr{A}$ 是 I 族，所以 $\mathscr{U}$ 也是 I 族，从而由 4.5 节例 1，

$$|\mathscr{U}|\leqslant 2^{n-1}. \tag{11}$$

又 $\mathscr{D}$ 中任意两个元素的并集不是 X，因此，由习题 9，

$$|\mathscr{D}|\leqslant 2^{n-1}. \tag{12}$$

由(10)，(11)，(12)得(9).

例 4 若 $\mathscr{A}_1$，$\mathscr{A}_2$，…，$\mathscr{A}_k$ 均为 I 族，则

$$\left|\bigcup\mathscr{A}_i\right|\leqslant 2^n-2^{n-k}. \tag{13}$$

解 $k=1$ 的情况即 4.5 节例 1. 假设(13)在 k 换为 $k-1$ 时成立，考虑 k 的情况.

由 4.5 节例 1 的注 2，可设 $|\mathscr{A}_k|=2^{n-1}$. 令

$$\mathscr{D}=\{A:A\notin\mathscr{A}_k\},$$

则 $\mathscr{D}$ 是下族并且 $|\mathscr{D}|=2^{n-1}$.

$\mathscr{B}=\bigcup_{i=1}^{k-1}\mathscr{A}_i$ 如果不是上族，那么有集 B，$B\supseteq A$，$A\in\mathscr{B}$. 因而有 $\mathscr{A}_m(1\leqslant m\leqslant k-1)$ 含 A，将 B 加到 $\mathscr{A}_m$ 中，$\mathscr{A}_m$ 仍为 I 族. 通过这样的添加，直至 $\mathscr{B}$ 成为上族.

于是，由例 1 及归纳假设，

$$\left|\bigcup_{i=1}^{k}\mathscr{A}_i\right|=|\mathscr{B}\cup\mathscr{A}_k|\leqslant|\mathscr{B}\cap\mathscr{D}|+|\mathscr{A}_k|$$

$$\leqslant\frac{1}{2^n}|\mathscr{B}|\cdot|\mathscr{D}|+2^{n-1}$$

$$\leqslant \frac{1}{2^n} \cdot (2^n - 2^{n-(k-1)}) \cdot 2^{n-1} + 2^{n-1}$$

$$= 2^n - 2^{n-k}.$$

(13)中的上界是最佳的. 令 $\mathscr{A}_i$ 由含元素 i 并且不含 1, 2, …, $i-1$ 的那些集组成,则 $|\mathscr{A}_i| = 2^{n-i}(1 \leqslant i \leqslant k)$.

$$|\bigcup_{i=1}^{k} \mathscr{A}_i| = \sum_{i=1}^{k} 2^{n-i} = 2^n - 2^{n-k}.$$

4.10 四函数定理

上节 Kleitman 引理(例 1)导出一系列结果,以 1978 年 Ahlswede 与 Daykin 的四函数定理为顶峰. 本节将介绍这一定理.

设 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ 为 X 的子集族,定义

$$\mathscr{A} \vee \mathscr{B} = \{E: E = A \cup B, A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\}, \tag{1}$$

$$\mathscr{A} \wedge \mathscr{B} = \{E: E = A \cap B, A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\}. \tag{2}$$

例 1 证明:

(i) 若 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ 为上族,则

$$\mathscr{A} \vee \mathscr{B} = \mathscr{A} \cap \mathscr{B}; \tag{3}$$

(ii) 若 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ 为下族,则

$$\mathscr{A} \wedge \mathscr{B} = \mathscr{A} \cap \mathscr{B}. \tag{4}$$

解 (i) 设集 $E \in \mathscr{A} \vee \mathscr{B}$,则 $E = A \cup B$, $A \in \mathscr{A}$, $B \in \mathscr{B}$. 由于 $\mathscr{A}$ 为上族,所以 $E \in \mathscr{A}$, $E \in \mathscr{B}$, 从而 $E \in \mathscr{A} \cap \mathscr{B}$.

反之,设 $E \in \mathscr{A} \cap \mathscr{B}$,则 $E = E \cup E$, $E \in \mathscr{A}$, $E \in \mathscr{B}$, 所以 $E \in \mathscr{A} \vee \mathscr{B}$.

因此(3)成立.

(ii)的证明与(i)类似.

例 2 (四函数定理) 若α, β, γ, δ是四个定义在$P(X)$上的非负函数,对任意A, $B\subseteq X$, 满足

$$\alpha(A)\beta(B)\leqslant\gamma(A\cup B)\delta(A\cap B), \tag{5}$$

则对X的任意两个子集族$\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$,

$$\alpha(\mathscr{A})\beta(\mathscr{B})\leqslant\gamma(\mathscr{A}\vee\mathscr{B})\delta(\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}), \tag{6}$$

其中

$$\alpha(\mathscr{A})=\sum_{A\in\mathscr{A}}\alpha(A), \tag{7}$$

$\beta(\mathscr{B})$, $\gamma(\mathscr{A}\vee\mathscr{B})$, $\delta(\mathscr{A}\vee\mathscr{B})$与此类似.

解 对X的元数n进行归纳.

$n=1$时,(5)成为

$$\begin{aligned}&\alpha(\varnothing)\beta(\varnothing)\leqslant\gamma(\varnothing)\delta(\varnothing),\\&\alpha(\varnothing)\beta(X)\leqslant\gamma(X)\delta(\varnothing),\\&\alpha(X)\beta(\varnothing)\leqslant\gamma(X)\delta(\varnothing),\\&\alpha(X)\beta(X)\leqslant\gamma(X)\delta(X).\end{aligned} \tag{8}$$

若$\mathscr{A}$或$\mathscr{B}$仅有一个元,则(6)显然成立:例如$\mathscr{A}=\{\varnothing\}$, $\mathscr{B}=\{\varnothing, X\}$, 则(6)式成为

$$\alpha(\varnothing)(\beta(\varnothing)+\beta(X))\leqslant(\gamma(\varnothing)+\gamma(X))\delta(\varnothing),$$

即(8)的前两个式子之和.

若$\mathscr{A}=\mathscr{B}=\{\varnothing, X\}$, 则(6)式成为

$$\begin{aligned}&(\alpha(\varnothing)+\alpha(X))(\beta(\varnothing)+\beta(X))\\&\leqslant(\gamma(\varnothing)+\gamma(X))(\delta(\varnothing)+\delta(X)).\end{aligned} \tag{9}$$

当$\delta(\varnothing)=0$时,由(8)的前面三式,(9)的左边为

$\alpha(X)\beta(X)$，因而由(8)的第四式，(9)成立．当 $\gamma(X)=0$ 时，情况类似．设 $\delta(\varnothing)$ 与 $\gamma(X)$ 均不为 0，则 $\gamma(\varnothing)\geqslant\frac{\alpha(\varnothing)\beta(\varnothing)}{\delta(\varnothing)}$，$\delta(X)\geqslant\frac{\alpha(X)\beta(X)}{\gamma(X)}$，

$$
\begin{aligned}
&(\gamma(\varnothing)+\gamma(X))(\delta(\varnothing)+\delta(X))\\
&-(\alpha(\varnothing)+\alpha(X))(\beta(\varnothing)+\beta(X))\\
\geqslant&\left(\frac{\alpha(\varnothing)\beta(\varnothing)}{\delta(\varnothing)}+\gamma(X)\right)\left(\delta(\varnothing)+\frac{\alpha(X)\beta(X)}{\gamma(X)}\right)\\
&-(\alpha(\varnothing)+\alpha(X))(\beta(\varnothing)+\beta(X))\\
=&\gamma(X)\delta(\varnothing)+\frac{\alpha(\varnothing)\alpha(X)\beta(\varnothing)\beta(X)}{\delta(\varnothing)\gamma(X)}\\
&-\alpha(\varnothing)\beta(X)-\alpha(X)\beta(\varnothing)\\
=&\frac{1}{\delta(\varnothing)\gamma(X)}(\gamma(X)\delta(\varnothing)\\
&-\alpha(\varnothing)\beta(X))(\delta(\varnothing)\gamma(X)-\alpha(X)\beta(\varnothing))\\
\geqslant&0\ \text{((8)的第二、三式)},
\end{aligned}
$$

即(9)成立．

假设结论对 $n-1$ 元集成立．考虑 n 元集 $X=Y\cup W$，其中 $Y=\{1,2,\cdots,n-1\}$，$W=\{n\}$．

对每一个集 $A\subseteq X$，令

$$A=A_1\cup A_2,\ A_1=A\cap Y,\ A_2=A\cap W.$$

又对任一集 $C\in P(Y)$（即 $C\subseteq Y$），定义函数

$$\alpha_1(C)=\sum_{\substack{A\in\mathscr{A}\\ A_1=C}}\alpha(A),$$

则

$$\alpha(\mathscr{A}) = \sum_{A \in \mathscr{A}} \alpha(A) = \sum_{C \in P(Y)} \sum_{\substack{A \in \mathscr{A} \\ A_1 = C}} \alpha(A)$$

$$= \sum_{C \in P(Y)} \alpha_1(C) = \alpha_1(P(Y)).$$

类似地可以定义 β_1，γ_1，δ_1，并且得到

$$\beta(\mathscr{B}) = \beta_1(P(Y)),$$

$$\gamma(\mathscr{A} \vee \mathscr{B}) = \gamma_1(P(Y)),$$

$$\delta(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}) = \delta_1(P(Y)).$$

若对所有 $C, D \in P(Y)$，

$$\alpha_1(C)\beta_1(D) \leqslant \gamma_1(C \cup D)\delta_1(C \cap D), \tag{10}$$

则由归纳假设，

$$\alpha(\mathscr{A})\beta(\mathscr{B}) = \alpha_1(P(Y))\beta_1(P(Y))$$

$$\leqslant \gamma_1(P(Y))\beta_1(P(Y)) = \gamma(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})\delta(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}).$$

因此只需证明(10).

固定 C, D. 对集 $R \in P(W)$ (即 $R \subseteq W$) 定义

$$\alpha_2(R) = \begin{cases} \alpha(R \cup C), & 若 R \cup C \in \mathscr{A}; \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

$$\beta_2(R) = \begin{cases} \beta(R \cup D), & 若 R \cup D \in \mathscr{B}; \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

$$\gamma_2(R) = \begin{cases} \gamma(R \cup (C \cup D)), & 若 R \cup (C \cup D) \in \mathscr{A} \vee \mathscr{B}; \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

$$\delta_2(R) = \begin{cases} \delta(R \cup (C \cap D)), & 若 R \cup (C \cap D) \in \mathscr{A} \wedge \mathscr{B}; \\ 0, & 其他. \end{cases}$$

则

$$\alpha_1(C) = \sum_{\substack{A\in\mathscr{A}\\ A_1=C}} \alpha(A) = \sum_{R\subseteq W} \sum_{\substack{A\in\mathscr{A}\\ A_1=C\\ A_2=R}} \alpha(A)$$

$$= \sum_{R\subseteq W} \alpha_2(R) = \alpha_2(P(W)),$$

同样

$$\beta_1(D) = \beta_2(P(W)),\ \gamma_1(C\cup D) = \gamma_2(P(W)),$$

$$\delta_1(C\cap D) = \delta_2(P(W)).$$

若对所有 $R, Q\in P(W)$，均有

$$\alpha_2(R)\beta_2(Q) \leqslant \gamma_2(R\cup Q)\delta_2(R\cap Q), \tag{11}$$

则由 $n=1$ 时的结论，

$$\alpha_1(C)\beta_1(D) = \alpha_2(P(W))\beta_2(P(W))$$

$$\leqslant \gamma_2(P(W))\delta_2(P(W)) = \gamma_1(C\cup D)\delta_1(C\cap D),$$

即(10)成立.

最后，我们证明(11)成立. 若 $\alpha_2(R)\beta_2(Q)=0$，(11)显然成立. 设 $\alpha_2(R)\beta_2(Q)\neq 0$，则

$$R\cup C\in\mathscr{A},\ Q\cup D\in\mathscr{B},$$

$$\alpha_2(R)\beta_2(Q) = \alpha(R\cup C)\beta(Q\cup D),$$

并且

$$(R\cup Q)\cup(C\cup D) = (R\cup C)\cup(Q\cup D)\in\mathscr{A}\vee\mathscr{B},$$

$$(R\cap Q)\cup(C\cap D) = (R\cup C)\cap(Q\cup D)\in\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}.$$

$$\gamma_2(R\cup Q)\delta_2(R\cap Q)$$

$$= \gamma((R\cup C)\cup(Q\cup D))\delta((R\cup C)\cap(Q\cup D)).$$

于是由(5)得(11) ($A = R\cup C,\ B = Q\cup D$).

四函数定理有众多的应用.

例 3　若 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ 为 X 的集，则

$$|\mathscr{A}|\cdot|\mathscr{B}|\leqslant|\mathscr{A}\vee\mathscr{B}|\cdot|\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}|. \tag{12}$$

解　在例 2 中取 $\alpha=\beta=\gamma=\delta=1$ 即得.

例 4　试用四函数定理证明 Kleitman 引理(4.9 节例 1).

解　令 $\mathscr{A}=\mathscr{U}\cap\mathscr{D}$, $\mathscr{B}=P(X)$. $\mathscr{A}\vee\mathscr{B}$ 中任一元可表为 $A\cup B$, $A\in\mathscr{A}$, $B\in\mathscr{B}$. 因为 $A\in\mathscr{U}$. 而 $\mathscr{U}$ 为上族，所以 $A\cup B\in\mathscr{U}$. 从而 $\mathscr{A}\vee\mathscr{B}\subseteq\mathscr{U}$. $\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}$ 中任一元可表为 $A\cap B$, $A\in\mathscr{A}$, $B\in\mathscr{B}$. 因为 $A\in\mathscr{D}$，而 $\mathscr{D}$ 为下族，所以 $A\cap B\in\mathscr{D}$. 从而 $A\wedge\mathscr{B}\subseteq\mathscr{D}$.

由(12)，

$$\begin{aligned}2^n|\mathscr{U}\cap\mathscr{D}|&=|\mathscr{A}|\cdot|\mathscr{B}|\\&\leqslant|\mathscr{A}\vee\mathscr{B}|\cdot|\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}|\leqslant|\mathscr{U}|\cdot|\mathscr{D}|.\end{aligned}$$

例 5　令 $\mathscr{A}-\mathscr{B}=\{A-B:A\in\mathscr{A},\ B\in\mathscr{B}\}$. 证明对任一集族 $\mathscr{A}$，

$$|\mathscr{A}-\mathscr{A}|\geqslant|\mathscr{A}|. \tag{13}$$

解　令 $\mathscr{A}'=\{A':A\in\mathscr{A}\}$. 由(12)，

$$\begin{aligned}|\mathscr{A}|\cdot|\mathscr{B}|&=|\mathscr{A}|\cdot|\mathscr{B}'|\\&\leqslant|\mathscr{A}\vee\mathscr{B}'|\cdot|\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}'|\\&=|(\mathscr{A}\vee\mathscr{B}')'|\cdot|\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}'|\\&=|\mathscr{A}'\wedge\mathscr{B}|\cdot|\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}'|\\&=|\mathscr{B}-\mathscr{A}|\cdot|\mathscr{A}-\mathscr{B}|.\end{aligned}$$

取 $\mathscr{B}=\mathscr{A}$，得 $|\mathscr{A}|^2\leqslant|\mathscr{A}-\mathscr{A}|^2$，即(13)成立.

4.11　*H*　族

Helly 定理是众所周知的：在平面上的 n 个凸集，如果每

三个均有公共点，那么这 n 个凸集必有公共点（例如参看拙著《覆盖》，上海教育出版社 1983 年出版）. 换句话说，如果这 n 个凸集没有公共点，那么其中必有三个凸集没有公共点.

H 族（Helly 族）的定义即由此而来.

设 $\mathscr{A}$ 是 X 的子集族. 如果对于 $\mathscr{A}$ 的任一个子族 $\mathscr{B}=\{B_1, B_2, \cdots, B_s\}\subseteq\mathscr{A}$，当

$$\bigcap_{B\in\mathscr{B}} B = B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_s=\varnothing \qquad (1)$$

时，均可从 $B_1, B_2, \cdots, B_s$ 中取出至多 k 个，它们的交为空集，那么 $\mathscr{A}$ 就称为 H_k 族.

H_1 族中，所有非空子集的交必须非空（否则由(1)导出 $B_1, B_2, \cdots, B_s$ 中至少有一个为空集）. 反之，交非空的一些非空子集组成 H_1 族，将空集添加进去也还是 H 族.

H_2 族也常简称为 H 族. 在这种族中，如果每两个非空子集均有公共元，那么族中所有非空子集也有公共元. 数轴上的闭区间所成的族就是 H_2 族.

平面上的凸集所成的族是 H_3 族.

显然，当 $k\geqslant|\mathscr{A}|$ 时，$\mathscr{A}$ 是 H_k 族. 又由定义易知：

(i) H_k 族的子集一定是 H_k 族；

(ii) H_{k-1} 族一定是 H_k 族. 但 H_k 族不一定是 H_{k-1} 族. 如果 $\mathscr{A}$ 是 H_k 族而不是 H_{k-1} 族，那么 $\mathscr{A}$ 中有 k 个集 $A_1, A_2, \cdots, A_k$，满足

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k=\varnothing. \qquad (2)$$

但 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 中任意 $k-1$ 个的交都不是空集；

(iii) 设 $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 是 H_k 族，那么

$$\mathscr{B}=\{A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_s}\mid 1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_s\leqslant t\}$$

也是 H_k 族（若 $\mathscr{B}$ 中子集 $B_1, B_2, \cdots, B_u$ 的交为空集，则由于

每个 B_i 为若干个 $A \in \mathscr{A}$ 的交，所以必有若干个 A 的交为空集，不妨设 $A_1, A_2, \cdots, A_v$ 的交为空集，并且每个 A_i $(1 \leqslant i \leqslant v)$ 至少包含一个 B_{j_i} $(1 \leqslant j_i \leqslant u)$. 因为 $\mathscr{A}$ 是 H_k 族，在 A_i $(1 \leqslant i \leqslant v)$ 中有 $l \leqslant k$ 个的交为空集，含于这 l 个 A_i 中的相应的 B_{j_i}（其中可能有相等的），个数 $\leqslant l \leqslant k$，而且交为空集）.

为了讨论 H 族的最大元数，我们需要一点准备，即下面的例 1，它本身也是很有趣的.

例 1 设 $A_1, A_2, \cdots, A_t$; $B_1, B_2, \cdots, B_t$ 都是 n 元集 X 的子集，满足：

(i) $A_i \cap B_i = \varnothing$ $(i = 1, 2, \cdots, t)$;

(ii) 当 $i \neq j$ 时，A_i 不是 $A_j \cup B_j$ 的子集 $(i, j = 1, 2, \cdots, t)$.

设 $|A_i| = a_i$, $|B_i| = b_i$,

$$w(i) = w(a_i, b_i, n) = \frac{1}{C_{n-b_i}^{a_i}}, \tag{3}$$

则

$$\sum_{i=1}^{t} w(i) \leqslant 1. \tag{4}$$

当且仅当 $B_1 = B_2 = \cdots = B_t = B$, $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 为 $X - B$ 的全部 a 元子集 $(1 \leqslant a \leqslant n - |B|)$ 时，(4)中等号成立.

解 对 n 进行归纳. $n = 1$ 时 $t = 1$, $A_1 = X$, $B_1 = \varnothing$，结论显然. 设结论对 $n - 1$ 成立，考虑 n 元集 X 的情形.

不妨设 $A_i \cup B_i \neq X$（否则由(ii)得 $t = 1$，结论显然），$i = 1, 2, \cdots, t$. 因而 $a_i + b_i \leqslant n$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$.

令 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为 X 的全部 $n-1$ 元子集 $(j \notin X_j$, $j = 1, 2, \cdots, n)$. 对 $1 \leqslant j \leqslant n$，令

$$I_j = \{i \mid 1 \leqslant i \leqslant t,\ A_i \subseteq X_j\}.$$

又对 $i \in I_j$，令

$$B_{ij} = B_i \cap X_j,\ b_{ij} = |B_{ij}|,$$

$$w_{j(i)} = w(a_i,\ b_{ij},\ n-1) = \frac{1}{C_{n-1-b_{ij}}^{a_i}}.$$

对 $n-1$ 元集 X_j 及其子集 A_i，B_{ij}，$(i \in I_j)$，由归纳假设，

$$\sum_{i \in I_j} w_{j(i)} \leqslant 1,\quad j = 1, 2, \cdots, n. \tag{5}$$

含 A_i 的 X_j 共 $n-a_i$ 个，其中含 B_i 的 X_j 共 $n-a_i-b_i$ 个，不含 B_i 的 X_j 共 b_i 个. 对不含在 X_j 中的 B_i，$b_{ij} = |B_{ij}| = b_i - 1$，$w_{j(i)} = \frac{1}{C_{n-b_i}^{a_i}}$. 因此对固定 i，

$$\sum_{i \in I_j} w_{j(i)} = (n-a_i-b_i) \times \frac{1}{C_{n-1-b_i}^{a_i}} + b_i \times \frac{1}{C_{n-b_i}^{a_i}}$$

$$= (n-b_i) \times \frac{1}{C_{n-b_i}^{a_i}} + b_i \times \frac{1}{C_{n-b_i}^{a_i}} = n\,w(i). \tag{6}$$

综合(5)，(6)得

$$n = \sum_{j=1}^{n} 1 \geqslant \sum_{j=1}^{n} \sum_{i \in I_j} w_{j(i)} = \sum_{i=1}^{t} \sum_{i \in I_j} w_{j(i)} = n \sum_{i=1}^{t} w(i),$$

即(4)成立.

若(4)中等号成立，则(5)中等号成立. 可由归纳假设得出等号成立的条件，参见习题 31.

注 1：条件(ii)隐含 A_i 均不是空集.

注 2：当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_t = a$，$b_1 = b_2 = \cdots = b_t = b$ 时，(4)成为 $t \leqslant C_{n-b}^{a}$.

称 $r+1$ 元集的全部($r+1$ 个)r 元子集所成的族为 $K^{(r+1)}$.

例 2 设子集族 $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 中,每个集 A_i 的元数 $\leqslant r$,则 $\mathscr{A}$ 为 H_r 族的充分必要条件是 $\mathscr{A}$ 不含 $K^{(r+1)}$.

解 若 $\mathscr{A}$ 含有 $K^{(r+1)}$, $K^{(r+1)}$ 中各子集的并集为 $\{1, 2, \cdots, r+1\}$,则 $K^{(r+1)}$ 由 $B_i=\{1, 2, \cdots, r+1\}-\{i\}$ ($i=1, 2, \cdots, r+1$) 这 $r+1$ 个子集组成. B_1 不含 1,B_2 不含 2,$\cdots$, B_{r+1} 不含 $r+1$,因此 $B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{r+1}=\varnothing$. 但任意 r 个子集的交 $B_1\cap\cdots\cap B_{i-1}\cap B_{i+1}\cap\cdots\cap B_{r+1}=\{i\}\neq\varnothing$. 所以 $\mathscr{A}$ 不是 H_r 族.

反之,设 $\mathscr{A}$ 不是 H_r 族. 因为 $\mathscr{A}$ 是 H_n 族,所以必存在 $k\geqslant r$,使 $\mathscr{A}$ 为 H_{k+1} 族,但不是 H_k 族. 因此 $\mathscr{A}$ 中必存在 $A_1, A_2, \cdots, A_{k+1}$ 它们的交为空集,但它们中每 k 个的交非空. 设 $x_i\in\bigcap\limits_{\substack{1\leqslant j\leqslant k+1\\ j\neq i}} A_j$,则 $x_i\notin A_i$. 因此 $x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}$ 互不相同, $|A_j|\geqslant k\geqslant r$,但已知 $|A_j|\leqslant r$,所以 $|A_j|=k=r$. $A_1, A_2, \cdots, A_{r+1}$ 构成族 $K^{(r+1)}$,即 $\mathscr{A}$ 必含 $K^{(r+1)}$.

从上面的证明顺便得到对任意 $k\geqslant r+1$, $\mathscr{A}$ 一定是 H_k 族.

例 3 若 $k<r$, $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 是 H_k 族,并且 A_i 都是 r 元集 $(1\leqslant i\leqslant t)$,则

$$t\leqslant C_{n-1}^{r-1}. \tag{7}$$

当且仅当 $\mathscr{A}$ 由含某一元素 $x\in X$ 的所有 r 元子集组成时,等式成立.

解 考虑集族

$$\mathscr{B}=\{B: |B|=r-1, \text{并且 } B=A_i\cap A_j, 1\leqslant i<j\leqslant t\}.$$

由前面的(iii), (i), $\mathscr{B}$ 是 H_k 族. 再由(ii), $\mathscr{B}$ 也是 H_{r-1}

族，因此 $\mathscr{B}$ 不含 $K^{(r)}$. 每个 A_i 是 r 元集，它必有一个 $r-1$ 元子集 $C_i \notin \mathscr{B}$（因为 $\mathscr{B}$ 不含 $K^{(r)}$）. C_i 不含于任一 A_j $(j \neq i)$（否则 $C_i = A_i \cap A_j$, $C_i \in \mathscr{B}$）.

对 $C_1, C_2, \cdots, C_t$ 及 $A_1 - C_1, A_2 - C_2, \cdots, A_t - C_t$，应用例 1 的注 2（$a = |C_1| = \cdots = |C_t| = r-1$, $b = |A_1 - C_1| = \cdots = |A_t - C_t| = 1$）得

$$t \leqslant C_{n-1}^{r-1}.$$

等号成立导出 $A_1 - C_1 = A_2 - C_2 = \cdots = A_t - C_t = \{x\}$，即 $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 是含某一元素 $x \in X$ 的全体 r 元子集.

因此，若 $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 是 r 元子集所成的族，并且是 H_k 族. 则当 $k < r$ 时，t 的最大值为 C_{n-1}^{r-1}. 当 $k \geqslant r+1$ 时，t 的最大值为 C_n^r，即 $\mathscr{A}$ 可由全体 r 元子集组成（参见例 2 最后的一句话）. $k = r$ 时，尚无精确的结论. 但下面的例 4 讨论了 $\mathscr{A}$ 中子集的元数为 r 或 $r+1$ 的情况.

例 4　若 $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 为 H_r 族，并且 $|A_i| = r$ 或 $r+1$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$，则

$$t \leqslant C_n^r. \tag{8}$$

解　将 $\mathscr{A}$ 分为两个部分，$\mathscr{A}_1 = \{A_1, A_2, \cdots, A_s\}$, $\mathscr{A}_2 = \{A_{s+1}, \cdots, A_t\}$. 其中 $|A_1| = \cdots = |A_s| = r+1$, $|A_{s+1}| = \cdots = |A_t| = r$. 与例 3 类似，令

$$\mathscr{B} = \{B: |B| = r, B = A_i \cap A_j, 1 \leqslant i < j \leqslant s\}.$$

因为 $\mathscr{A}$ 为 H_r 族，由前面的(iii)，(i)，$\mathscr{B} \cup \mathscr{A}_2$ 也是 H_r 族. 于是由例 2，$\mathscr{B} \cup \mathscr{A}_2$ 不含 $K^{(r+1)}$. 每个 $A_i (1 \leqslant i \leqslant s)$ 必有一个 r 元子集 $C_i \notin \mathscr{B} \cup \mathscr{A}_2$. C_i 不是 $A_j (1 \leqslant j \leqslant s, j \neq i)$ 的子集（否则 $C_i \in \mathscr{B}$）. 于是 $s \leqslant$ 不属于 $\mathscr{B} \cup \mathscr{A}_2$ 的 r 元子集的个数.

$$t = |\mathscr{A}_1| + |\mathscr{A}_2| \leqslant \text{全部 } r \text{ 元子集的个数 } C_n^r.$$

任取一元素 $x \in X$. 若 $\mathscr{A}$ 由全部含 x 的 r 元与 $r+1$ 元子集组成，则 $\mathscr{A}$ 显然为 H_1 族（因而也是 H_r 族）并且

$$|\mathscr{A}| = C_{n-1}^{r-1} + C_{n-1}^{r} = C_n^r.$$

所以(8)中上界为最佳.

4.12 相距合理的族

本节需量一点线性代数的知识.

$\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 是 n 元集 X 的子集族. 如果对 $\mathscr{A}$ 中任意两个集 A_i, A_j，均有

$$|A_i \triangle A_j| \geqslant \frac{n}{2}, \tag{1}$$

那么 $\mathscr{A}$ 称为**相距合理的族**.

相距合理的族与编码理论有关.

对每一个集 A_j，可以定义

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{若 } i \in A_j; \\ -1, \text{若 } i \notin A_j. \end{cases} \quad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

这就得一个与 A_j 相对应的、长为 n 的、1 与 -1 的码（序列）

$$\alpha_j = (x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

对两个码 $\alpha_j = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\alpha_k = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$，定义它们的积（内积）为

$$\alpha_j \alpha_k = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n. \tag{2}$$

(2)式右边负项的个数就是恰属于 A_j, A_k 之一的那些 i 的个数. 因此

$$\alpha_j \alpha_k = n - 2 |A_j \triangle A_k|. \tag{3}$$

对相距合理的族，$\alpha_j\alpha_k \leqslant 0$.

为了定出相距合理的族 $\mathscr{A}$ 的元数 t 的最大值，需要一个引理，即下面的例 1.

例 1 若 n 维空间中 $n+r$ 个非零向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+r}$，满足内积

$$(\alpha_i, \alpha_j) \leqslant 0, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n+r,$$

(即每两个 α_i, α_j 之间的夹角不是锐角)，则 $r \leqslant n$，并且这 $n+r$ 个向量可分为 r 组，每两个不同组的向量互相垂直(即内积为 0). 当 $r=n$ 时，这 $2n$ 个向量可分为 n 组，每组两个向量. 每两个不同组的向量互相垂直；同一组的两个向量方向相反.

解 采用归纳法. $n=1$ 时，结论显然. 假设结论在 n 换为较小的数时成立，考虑 n 的情况. 从 $n+r$ 个向量中任取 $n+1$ 个，例如 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$，它们必线性相关，即有不全为 0 的实数 $k_1, k_2, \cdots, k_{n+1}$ 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{n+1}\alpha_{n+1} = 0.$$

不妨设其中 $k_1, k_2, \cdots, k_j$ 为正，其余的非正，移项得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_j\alpha_j = -k_{j+1}\alpha_{j+1} - \cdots - k_{n+1}\alpha_{n+1}. \quad (4)$$

两边同乘 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_j\alpha_j$，得

$$0 \leqslant (k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_j\alpha_j)^2$$

$$= (k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_j\alpha_j) \cdot (-k_{j+1}\alpha_{j+1} - \cdots - k_{n+1}\alpha_{n+1}).$$

上式右边用分配律展开后，每一项均不大于 0，因此必有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_j\alpha_j = 0, \quad (5)$$

其中 $j \leqslant n+1$.

用 $\alpha_i (i > j)$ 乘(5)式，得

$$0 = k_1\alpha_1\alpha_i + k_2\alpha_2\alpha_i + \cdots + k_j\alpha_j\alpha_i \leqslant 0 \quad (6)$$

(因为 $k_1, k_2, \cdots, k_j$ 均为正数),所以

$$\alpha_1\alpha_i = \alpha_2\alpha_i = \cdots = \alpha_j\alpha_i = 0. \tag{7}$$

因此 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_j$ 生成的空间维数 $n_1 < n$, 并且 $\alpha_{j+1}, \cdots, \alpha_{n+r}$ 均与这个空间垂直. 设后者生成的空间维数为 n_2, 则 $n_1 + n_2 \leqslant n$.

(5)表明 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_j$ 线性相关,所以 $j \geqslant n_1 + 1$. 设 $j = n_1 + r_1$, $n + r - j = n_2 + r_2$.

由归纳假设 $r_1 \leqslant n_1$, $r_2 \leqslant n_2$, 并且 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_j$ 可分为 r_1 组, $\alpha_{j+1}, \cdots, \alpha_{n+r}$ 可分为 r_2 组,每两个不同组的向量互相垂直. 而

$$r = (r_1 + r_2 + n_1 + n_2) - n \leqslant r_1 + r_2$$
$$\leqslant n_1 + n_2 \leqslant n.$$

当 $r = n$ 时, $n_1 + n_2 = n$, $r_1 = n_1$, $r_2 = n_2$. 仍由归纳假设, $2n_1$ 个向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_j$ 可分为 n_1 组,每组两个向量, $2n_2$ 个向量 $\alpha_{j+1}, \cdots, \alpha_{2n}$ 也可分为 n_2 组,每组两个向量,并且每两个不同组的向量互相垂直,同一组的两个向量方向相反.

例 2 设 $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 是 n 元集 X 的相距合理的族,则

$$t \leqslant \begin{cases} 2n, & 若\ n \equiv 0 \pmod 4; & (8) \\ n+1, & 若\ n\ 为奇数; & (9) \\ n+2, & 若\ n \equiv 2 \pmod 4. & (10) \end{cases}$$

解 定义向量 $\alpha_j (j = 1, 2, \cdots, t)$ 如本节开头所说,则

$$\alpha_i\alpha_j = n - 2 \mid A_j \triangle A_i \mid \leqslant 0. \tag{11}$$

由例 1, $t \leqslant 2n$. 即(8)成立.

若 $t \geqslant n+2$, 则由例 1, $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 至少可分为两个

组，不同组的两个向量 α_i，α_j 垂直，因此

$$n-2|A_i\triangle A_j|=\alpha_i\alpha_j=0. \tag{12}$$

从而 n 为偶数，即(9)成立.

最后，若 $t\geqslant n+3$，则由例1，至少有三个向量 α_i，α_j，α_k 两两垂直，从而由(12)，

$$|A_i\triangle A_j|=|A_j\triangle A_k|=|A_k\triangle A_i|=\frac{n}{2};$$

而由1.10例2，

$$|A_j'\triangle A_k|=|X-(A_j\triangle A_k)|=n-\frac{n}{2}=\frac{n}{2}.$$

所以

$$|A_i\triangle A_j|+|A_j'\triangle A_k|-|A_i'\triangle A_k|=\frac{n}{2}. \tag{13}$$

由习题5，(13)的左边是偶数

$$2|A_i\cap A_j'\cap A_k'|+2|A_i'\cap A_j\cap A_k|.$$

因此 n 是4的倍数，即(10)成立.

(8)，(9)，(10)中等号均可成立. 这与 Hadamard 矩阵有关，请参看有关专著.

例 3 若 $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 中，每两个子集 A_i，A_j 均满足

$$|A_i\triangle A_j|=k, \tag{14}$$

则当 $k=\dfrac{n+1}{2}$ 时，$t\leqslant n+1$，对其他的 k 值，$t\leqslant n$.

解 $n=1$ 的情况是平凡的. 设 $n\geqslant 2$. 定义 α_1，α_2，…，α_t 同前，由(11)，对 $i\neq j$，

$$\alpha_i\alpha_j=n-2k, \tag{15}$$

$$\alpha_i^2 = n. \tag{16}$$

若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 线性无关，则 $t \leqslant n$，结论已经成立. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 线性相关，则有 $k_1, k_2, \cdots, k_t$ 不全为 0，满足

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_t\alpha_t = 0. \tag{17}$$

两边同乘 α_j，得

$$0 = \sum_{i=1}^{t} k_i\alpha_i\alpha_j = (n-2k)\sum_{i=1}^{t} k_i + 2kk_j,$$

从而

$$k_j = \frac{2k-n}{2k}\sum_{i=1}^{t} k_i. \tag{18}$$

由于有 k_j 不全为 0，所以 $\sum\limits_{i=1}^{t} k_i \neq 0$. 将(18)对 j 求和，得

$$\sum_{j=1}^{t} k_j = \frac{t(2k-n)}{2k}\sum_{i=1}^{t} k_i,$$

从而 $\frac{t(2k-n)}{2k} = 1$，即 $t = \frac{2k}{2k-n}$. 若 $t > n$，则

$$\frac{2k}{2k-n} > n. \tag{19}$$

(19)表明 $b = 2k - n > 0$，从而 $n + b > bn$，$1 > (b-1) \cdot (n-1)$. 于是 $b = 1$，$k = \frac{n+1}{2}$.

例 3 中的 $|A_i \triangle A_j|$ 改为 $|A_i \cap A_j|$ 时，有类似的结果.

例 4 设子集族 $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 中，每两个子集 A_i，A_j，均满足

$$|A_i \cap A_j| = k, \tag{20}$$

则当 $k = 0$ 时，$t \leqslant n+1$. 其他情况 $t \leqslant n$.

解 若有某个集，例如 A_1，满足 $|A_1|=k$，则所有 $A_j\supset A_1(j=2, 3, \cdots, t)$，并且每两个 A_j，A_r 除 A_1 的元外无其他公共元. 因而 $X-A_1$ 的 $n-k$ 个元，每一个至多属于一个 A_j $(j=2, 3, \cdots, t)$，同时每个 $A_j(j=2, 3, \cdots, t)$ 至少含这 $n-k$ 个元中一个元. 这表明 $n-k\geqslant t-1$，即 $t\leqslant n+1-k$，结论成立.

设每个集 A_i 的元数 $a_i=|A_i|\geqslant k+1$.

对每一个集 A_j，定义：

$$x_i=\begin{cases}1, & 若\ i\in A_j;\\ 0, & 若\ i\notin A_j.\end{cases}\quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

这样就得到一个与 A_j 对应的、长为 n 的、1 与 0 的序列(码)

$$\alpha_j=(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

显然内积

$$\alpha_i\alpha_j=|A_i\cap A_j|, \quad (i\neq j) \tag{21}$$

$$\alpha_i^2=\alpha_i\alpha_i=a_i. \tag{22}$$

我们证明 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 线性无关，从而 $t\leqslant n$. 为此，设有

$$\sum_{i=1}^{t}k_i\alpha_i=0. \tag{23}$$

与例 3 相同，在(23)两边同乘 α_j 得

$$0=\sum_{i=1}^{t}k_i\alpha_i\alpha_j=k\sum_{i=1}^{t}k_i+(a_j-k)k_j,$$

从而

$$k_j=\frac{k}{k-a_j}\sum_{i=1}^{t}k_i=\frac{k}{k-a_j}S. \tag{24}$$

再对 j 求和得

$$S = \sum_{j=1}^{t} k_j = S \sum_{j=1}^{t} \frac{k}{k - a_j}. \tag{25}$$

因为 $a_j \geqslant k+1$，所以 $\sum_{j=1}^{t} \frac{k}{k-a_j} < 0 < 1$. 于是由

$$\left(1 - \sum_{j=1}^{t} \frac{k}{k - a_j}\right) S = 0,$$

得 $S=0$. 再由(24)得一切 $k_j=0$. 从而 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 线性无关. 结论成立.

第五章　无　限　集

5.1 无　限　集

通俗地说，无限集就是元数为无限（无穷）的集合. 但是，什么是“无限”呢？如果我们回答：

无限就是无限集的元数，

那么不仅成为循环定义. 而且，无法进行更深入的研究.

利用对应可以比较两个集合元素的多寡，也可以定义什么是无限集.

定义　如果集合 A 能够与它的一个真子集一一对应，那么 A 就称为无限集.

显然，两个有限集如果能一一对应，它们的元数就一样多. 因此一个有限集不可能与（元数比它少的）真子集一一对应.

例 1　证明自然数集 $\mathbf{N}$ 与全体正偶数的集 M 之间存在一一对应.

解　令 $n \overset{f}{\longmapsto} 2n$，则 f 是从 $\mathbf{N}$ 到 M 的对应. 不同的 n，像 $f(n)=2n$ 也不同. 并且 M 中的每一个数 $2n$，都有原像 n 满足 $f(n)=2n$. 所以 f 是一一对应.

M 显然是 $\mathbf{N}$ 的真子集. 因此，根据上面的定义，$\mathbf{N}$ 是无限集.

例 2　如果集合 A，B 之间有一对应 f，A 为无限集，那

么 B 也是无限集.

解 因为 A 为无限集，所以有 A 的真子集 A_1 及一一对应 φ: $A \to A_1$.

对任一 $b \in B$，有唯一的 $a \in A$，满足 $f(a) = b$. 设 $\varphi(a) = a_1 \in A_1$，$f(a_1) = b_1 \in B$，令

$$\psi(b) = b_1. \tag{1}$$

这一映射可用下面的图来表示：

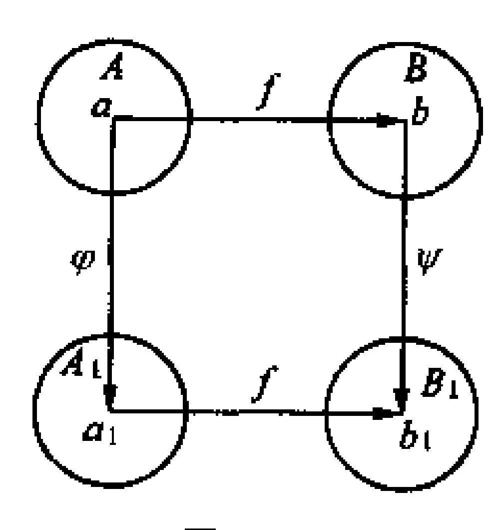


图 5.1.1

设在映射 f 下，A_1 的像 $f(A_1) = B_1$，则 ψ 是从 B 到 B_1 的映射. 易知每个 $b_1 \in B_1$ 均有唯一的 a_1 满足 $f(a_1) = b_1$，由 a_1 又得到唯一的 a 与唯一的 b，因此 ψ 是一一对应.

A_1 是 A 的真子集，所以必有元素 $a \in A - A_1$，这时 $f(a) \in B - B_1$，即 B_1 是 B 的真子集.

因此 B 是无限集.

例 3 集合 B 是集合 A 的子集，如果 B 是无限集，那么 A 也是无限集.

解 因为 B 为无限集，所以必有 B 的真子集 B_1 与一一对应 f: $B \to B_1$.

作 A 到自身的映射 φ，

$$\varphi_{(a)} = \begin{cases} a, & 若 a \in A-B; \\ f(a), & 若 a \in B. \end{cases}$$

易知像集 $\varphi(A) = (A-B) \cup B_1$ 是 A 的真子集，并且 φ 是 A 到 $\varphi(A)$ 的一一对应. 因此 A 是无穷集.

若集 A, B 间能建立起一一对应，则称 A 与 B 是对等的，或者称它们有相同的基数(或势)，记为 $A \sim B$.

对于有限集，基数就是它的元数.

对于无限集，基数就是能与它一一对应的集合的族. 通俗地说，就是这些一一对应的集合的共同性质，说成是这个无限集的元数也无不可. 但是，要注意无穷集可以与它的真子集有相同的基数.

5.2 可 数 集

凡与自然数集 N 对等的集称为可数集. 下面是几个可数集的例子：

$A = \{1, 4, 9, 16, \cdots, n^2, \cdots\}$,

$B = \{1, 8, 27, 64, \cdots, n^3, \cdots\}$,

$C = \{1, 3, 5, 7, \cdots, 2n-1, \cdots\}$,

$D = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$,

$E = \{p : p 为素数\}$.

显然一个集合 A 为可数集的充分必要条件是它的元素可列成一个形如

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots \tag{1}$$

的(各项不重复出现的)无穷数列，A 的每一个元素恰在(1)中出现一次.

例 1 证明：

(i) 任一无限集 A 必含一真子集是可数集；

(ii) 可数集的任一无限子集是可数的；

(iii) 可数集与有限集的并集是可数集；

(iv) 有限多个可数集的并集是可数集；

(v) 可数个可数集的并集是可数集.

解 (i) A 与它的真子集 A_1 对等. A_1 是无穷集，因而又与真子集 A_2 对等，…… 这样得到

$$A \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$$

每一个集 A_i 是前一个集的真子集（$i = 1, 2, \cdots$）.

在 $A_1 - A_2$ 中取元 a_1，在 $A_2 - A_3$ 中取元 a_2，……，在 $A_n - A_{n+1}$ 中取元 a_n，…… 得到集合

$$B = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\},$$

它是含于 A 中的可数集.

因此，可数集是无限集中“最小的”集.

(ii) 可数集 A 的元素可列成(1)的形式. 它的无限子集可写成(1)的无限子数列，显然是可数集.

(iii) 将可数集 A 的元素列成数列(1). 又设有限集 $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_k\}$，则 $A \dot{\cup} B$ 的元素可列成数列

$$b_1, b_2, \cdots, b_k, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots \tag{2}$$

（若 $b_1, b_2, \cdots, b_k$ 中有在 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 中出现的，则将这样的 b 从(2)中划去）.

(iv) 设 $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}, \cdots\}$，$i = 1, 2, \cdots, k$，是 k 个可数集，则

$$a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{k1}, a_{12}, a_{22}, \cdots,$$

$$a_{k2}, \cdots, a_{1n}, a_{2n}, \cdots, a_{kn}, \cdots$$

(必要时划去一些重复元素)是一可数集.

(v) 设 $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}, \cdots\}$, $i = 1, 2, \cdots$, 是可数个可数集. 先将它们的元素排成矩阵:

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots \\ & \cdots\cdots & & \end{array}$$

然后再将这些元素排成一列:

$$a_{11}\ a_{12}\ a_{21}\ a_{13}\ a_{22}\ a_{31}\ \cdots \tag{3}$$

即先排下标的和为 2 的元, 再排下标和为 3 的元, ……依照下标的和的大小排列各个元素, 在下标和相同时, 依照横坐标(第一个下标)的大小排列各个元素(只有有限多个). 这样, 每个元素在数列(3)中至少出现一次(或早或迟必然出现). 如果一个元素在(3)中已经出现过一次, 那么在它第二、三、……次出现时, 将它划去. 这样 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$ 的每个元素在(3)中恰好出现一次. 因此 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 是可数集.

例 3 全体有理数的集 $\mathbf{Q}$ 是可数集.

解 由例 2, 只需证明正有理数的集合 $\mathbf{Q}^+$ 是可数集. 考虑集合

$$M_n = \left\{\frac{m}{n} \middle| m \in \mathbf{N}\right\}.$$

显然 M_n 是可数集, 它的元素可排成数列

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \cdots, \frac{m}{n}, \cdots.$$

由例 2(v)，

$$\mathbf{Q}^{+} = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \cdots \cup M_n \cup \cdots$$

是可数集.

例 4 如果集 A 的每个元素由 n 个互相独立的下标决定，每个下标各自跑遍一个可数集.那么 A 是可数集.

解 $n=1$ 时，结论显然.设当 $n=m$ 时结论成立，则对元素为 $a_{i_1 i_2 \cdots i_{m+1}}$ 的集 A，因为当 i_{m+1} 固定时，由元素 $a_{i_1 i_2 \cdots i_m i_{m+1}}$ 组成的集 $A_{i_{m+1}}$ 是可数集，根据例 2(v)，

$$\bigcup_{i_{m+1}} A_{i_{m+1}} = A$$

也是可数集.

由例 4 立即得到平面上的有理点(即横、纵坐标都是有理数的点)组成的集合是可数集.空间中的有理点所成的集也是可数集.

例 5 证明整系数多项式

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \tag{4}$$

$(n \in \mathbf{N},\ a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n \in \mathbf{Z})$ 的全体 A 是可数集.

解 对固定的 n，形如(4)的整系数多项式与 $n+1$ 维空间的整点$(a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n)$一一对应，它们都组成可数集.记前者所成的集为 A_n.

由例 2(v)，$A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是可数集.

(4)的根称为代数数.因为每个多项式只有有限个根.所以代数数的全体是可数集.

5.3 连续统的基数

无限集不都是可数集.

例 1 0 与 1 之间的实数组成的集

$$A=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 1\} \tag{1}$$

不是可数集.

解 如果 A 是可数集,将它的元素排成

$$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n,\ \cdots. \tag{2}$$

将每个 α_i 表成十进小数,并排成

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= 0.\,a_{11}a_{12}a_{13}\cdots a_{1n}\cdots,\\ \alpha_2 &= 0.\,a_{21}a_{22}a_{23}\cdots a_{2n}\cdots,\\ &\cdots\cdots\\ \alpha_n &= 0.\,a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots a_{nn}\cdots,\\ &\cdots\cdots\end{aligned} \tag{3}$$

$a_{ij}\,(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots)$ 都是数字,即 0, 1, …, 9.

现在作一个数 $\alpha=0.\,a_1a_2\cdots a_n\cdots$,其中 a_1, a_2, …都是数字,并且

$$a_n=\begin{cases}a_{nn}+2, 若\ a_{nn}<7;\\ a_{nn}-2, 若\ a_{nn}\geqslant 7.\end{cases}\quad (n=1,\ 2,\ \cdots) \tag{4}$$

显然 $0\leqslant\alpha\leqslant 1$ 即 $\alpha\in A$. 因此 α 应当在(3)中出现. 设 $\alpha_n=\alpha$. 但由定义 $a_n\neq a_{nn}$ 并且 a_n 与 a_{nn} 的差为 2,因此 $\alpha_n\neq\alpha$,矛盾. 这表明 A 不是可数集.

注:为避免出现 $0.999\cdots=1.00\cdots$ 的情况,我们取 a_n 与 a_{nn} 相差 2.

上面的证法称为对角线法.

例 1 的 A 及与 A 对等的集,称为具有连续统的基数,或称 A 的基数为$\aleph$(读做阿列夫). 而可数集的基数记为$\aleph_0$.

例 2 区间$[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$的基数都是$\aleph$.

解 令 $y = a + (b - a)x$. 这是$[0, 1]$与$[a, b]$之间的一一对应. 因此$[a, b]$与$[0, 1]$(即例 1 中的 A)具有相同的基数$\aleph$.

我们也可以给出(a, b), $[a, b)$, $(a, b]$与$[0, 1]$间的一一对应(参见习题 33),但更方便的是利用这样的结论:

无限集 M 去掉有限多个元素后,所得的集 K 与 M 对等.

事实上,由 4.2 节,M 含有一个可数集 E,不妨假定要去掉的有限多个元素均在 E 中(否则将它们加到 E 中). 从 E 中去掉这有限多个元素后所得的集 F 也是可数集. 在 E 与 F 之间有一一对应 φ,令

$$f(x) = \begin{cases} x, & 若\ x \in M - E; \\ \varphi(x), & 若\ x \in E. \end{cases}$$

则 f 是 M 到 K 的一一对应.

例 3 全体实数所成的集 $\mathbf{R}$,基数是$\aleph$.

解 $y = \tan \frac{\pi}{2} x$ 是$(-1, 1)$到 $\mathbf{R}$ 的一一对应.

类似地,$[0, +\infty)$的基数是$\aleph$.

例 4 如果集 A 的基数是$\aleph$,证明从 A 中去掉一个可数集 B 后,剩下的集的基数仍为$\aleph$.

解 由于 A 的基数是$\aleph$,所以 $A - B$ 是无限集(否则 $B \cup (A-B) = A$ 是可数集). 由 5.2 节例 $A-B$ 有一真子集 D 是可数集. $B \cup D$ 仍为可数集,它与 D 之间有一一对应 φ. 令

$$f(x)=\begin{cases} x, & 若 x \in A-B-D; \\ \varphi(x), & 若 x \in B \cup D. \end{cases}$$

则 f 是 A 到 $A-B$ 的一一对应. 因此 $A-B$ 的基数是$\aleph$.

由例 4 立即得到全体无理数所成的集,基数为$\aleph$;全体超越数(不是代数数的数)所成的集,基数也是$\aleph$.

例 5 证明自然数集 $\mathbf{N}$ 的全体子集所成的族 $\mathscr{A}$ 的基数为$\aleph$.

解 对 $\mathscr{A}$ 的元素 A ($\subseteq \mathbf{N}$),令二进制的小数

$$0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$$

与之对应. 其中

$$b_n=\begin{cases} 1, & 若 n \in A; \\ 0, & 若 n \notin A. \end{cases}$$

显然这是 $\mathscr{A}$ 到$[0, 1]$中所有二进小数的一一对应. 因此 $\mathscr{A}$ 与$[0, 1]$有同样的基数$\aleph$.

例 6 可数个两两不相交的基数为$\aleph$的集,它们的并集基数为$\aleph$.

解 设 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 中每一个 E_i 的基数为$\aleph$,则 E_i 可与区间$[i-1, i)$中的点一一对应. 从而, $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 与$[0, +\infty)$中的点一一对应.

注:"两两不相交"这一条件可以去掉. 参见下节例 8.

5.4 基数的比较

如果集合 A, B 的基数分别为α, β,并且满足:

(i) A 与 B 不对等;

(ii) A 与 B 的一个子集对等,

那么就说 A 的基数小于 B 的基数，或 B 的基数大于 A 的基数. 记为

$$\alpha<\beta\text{或}\beta>\alpha.$$

对有限集，上述概念与元数的大小完全一致.

每个有限集都与 $\mathbf{N}$ 的一个子集对等（n 元集与$\{1, 2, \cdots, n\}$对等），从而有限集的基数小于$\aleph_0$.

根据上节所说，$\aleph_0<\aleph$.

在$\aleph_0$与$\aleph$之间没有基数，即不存在一个集合 A，它的基数大于$\aleph_0$，小于$\aleph$. 这称为连续统假设. 大数学家希尔伯特在 1900 年提出的 23 个问题中，连续统假设列为第一个. 根据现代的研究，特别是 1963 年美国数学家科恩（Cohen）所作的工作，连续统假设与 ZF 公理是彼此独立的. 这里的 ZF 公理是由策梅罗（Zermelo, 1871—1953）建立、弗伦克尔（Fraenkel, 1891—1965）加以改进的公理系统，为绝大多数数学家所接受. 因此连续统假设在 ZF 公理系统中是无法证明的（正如平行公设无法用欧几里得的其他公理导出）.

有没有比$\aleph$更大的基数？回答是肯定的.

例 1 设集 A 的基数为α，$\mathscr{A}$是 A 的一切子集所成的族，则 $\mathscr{A}$ 的基数大于 α.

解 对 A 的任一个元a，令 $a\longmapsto\{a\}$. 这是 A 到 $\mathscr{A}$的子集$\{\{a\}: a\in A\}$的一一对应. 因此 A 与 $\mathscr{A}$ 的一个子集对等.

另一方面，A 与 $\mathscr{A}$不对等. 不然的话，设A 与 $\mathscr{A}$之间有一一对应 f.

将 A 中元素分为两类：

设$a\in A$. 若 $a\in f(a)$，则称 a 为好元素. 若 $a\notin f(a)$，则称 a 为坏元素.

设 A 中坏元素组成的集为 A_1. A_1 与 A 的元素 a_1 对应，即 $A_1 = f(a_1)$.

若 a_1 是好元素，则 $a_1 \in f(a_1) = A_1$. 但这与 A_1 的定义不符. 若 a_1 是坏元素，则 $a_1 \in A_1 = f(a_1)$，这又导出 a_1 为好元素，矛盾.

因此，A 与 $\mathscr{A}$ 不对等.

综合以上两个方面，$\mathscr{A}$ 的基数大于 α.

通常将 A 的全体子集的族 $\mathscr{A}$ 的基数记为 2^α. 在 A 为有限集时，$|\mathscr{A}|$ 确实为 2^α. 在 A 为无限集时，2^α 仅是代表 $\mathscr{A}$ 的基数的一个符号. 例 1 的结论就是

$$2^\alpha > \alpha. \tag{1}$$

上节例 5 表明 $2^{\aleph_0} = \aleph$. 从而由(1)又得到 $\aleph > \aleph_0$.

例 2 设集 $A \supseteq A_1 \supseteq A_2$. 若 $A_2 \sim A$，则 $A_1 \sim A$.

解 设对应 f 使 A 与 A_2 对等. 在对应 f 下，A 的子集 A_1 应与 A_2 的子集 A_3 对等，A_1 的子集 A_2 应与 A_3 的子集 A_4 对等，如此继续下去，得到一串集合

$$A \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq A_4 \supseteq A_5 \supseteq \cdots$$

具有性质：

$$A \sim A_2,$$

$$A_1 \sim A_3,$$

$$A_2 \sim A_4,$$

$$A_3 \sim A_5,$$

$$\cdots\cdots$$

并且由 $A_n(n = 1, 2, \cdots)$ 的定义，

$$A - A_1 \sim A_2 - A_3,$$
$$A_1 - A_2 \sim A_3 - A_4, \qquad (2)$$
$$A_2 - A_3 \sim A_4 - A_5,$$
$$\cdots\cdots$$

因为

$$A = (A - A_1) \cup (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup (A_3 - A_4) \cup (A_4 - A_5) \cup \cdots \cup (AA_1A_2\cdots), \qquad (3)$$

$$A_1 = (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup (A_3 - A_4) \cup (A_4 - A_5) \cup \cdots \cup (AA_1A_2\cdots). \qquad (4)$$

并且由(2)，(3)中的一、三、……诸项分别与(4)中的二、四、……诸项对等，其余的项则两两相同，所以 $A_1 \sim A$.

例 3 若 $A \supseteq A_1$，$B \supseteq B_1$，并且 $A \sim B_1$，$B \sim A_1$，则 $A \sim B$.

解 B 与 A_1 有一一对应 f. 在对应 f 下，B 的子集 $B_1 \sim A_1$ 的子集 A_2. 因为 $A \sim B_1$，$B_1 \sim A_2$，所以 $A \sim A_2$.

因为 $A \supseteq A_1 \supseteq A_2$，$A \sim A_2$，所以由上例，$A \sim A_1$. 因为 $B \sim A_1$，所以 $A \sim B$.

例 3 称为 Bernstein 定理，有很多应用.

注：$A \sim B_1 \subseteq B$ 可记成 $\alpha \leqslant \beta$. 例 3 即由 $\alpha \leqslant \beta$, $\beta \leqslant \alpha$ 可推出 $\alpha = \beta$. 应当注意，这并不是显然的. 因为关于无穷基数的不等式与通常的不等式意义不尽相同.

例 4 设三个基数 α, β, γ 满足 $\alpha < \beta$, $\beta < \gamma$, 则 $\alpha < \gamma$.

解 设集 A, B, C 的基数分别为 α, β, γ. 由已知 $A \sim B_1 \subseteq B$, $B \sim C_1 \subseteq C$. 从而 $A \sim C_2 \subseteq C_1$.

另一方面，若 $A \sim C$, 则 $C \sim C_2$. 从而由例 2，$C \sim C_1 \sim$

B. 这与 $\beta < \gamma$ 的定义不符，因此 A 不对等于 C.

综合以上两方面得 $\alpha < \gamma$.

例 5 表明关于基数的不等式具有传递性.

注：由关于基数的不等式的定义及例 3，$\alpha = \beta$，$\alpha < \beta$，$\alpha > \beta$ 三式不能同时成立. 但这三个关系是否必有一个成立需要证明. 证明要用到有序集与序数的概念. 我们建议读者阅读有关专著，例如豪斯道夫的《集论》(中译本科学出版社 1960 年出版).

例 6 平面上点的全体组成的集 A，基数为$\aleph$.

解 正方形

$$I = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x < 1, 0 \leqslant y < 1\}$$

中的点，坐标可写成无限的十进小数

$$\begin{aligned} x &= 0.a_1a_2a_3\cdots, \\ y &= 0.b_1b_2b_3\cdots. \end{aligned} \tag{5}$$

(约定不以 9 为循环节，即 $0.12 = 0.1200\cdots$ 不写成 $0.1199\cdots$. 这样每个坐标的表示是唯一的.)

因此，对于 (x, y)，有区间 $[0, 1)$ 中的一个实数

$$0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\cdots \tag{6}$$

与之对应. 显然不同的 (x, y) 对应的实数(6)也不同. 因此 I 与 $[0, 1)$ 的一个子集对等.

另一方面，显然 $[0, 1) \sim \{(x, 0) \mid 0 \leqslant x < 1\} \subseteq I$. 因此 I 的基数即 $[0, 1)$ 的基数$\aleph$.

平面点集 $A = \bigcup_{a, b \in \mathbf{Z}} \{(x, y) \mid a \leqslant x < a+1, b \leqslant y < b+1\}$，由上节例 6，$A$ 的基数为$\aleph$.

同样可证空间中全体点所成集，基数为$\aleph$.

例 7 区间 $[0, 1]$ 上的全体实函数所成的集，基数为 $2^{\aleph}$.

解 设所成的集为 A. 由于每个实函数 f 对应于平面上一条曲线 $\{(x, f(x)) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$，它是平面点集的一个子集，所以 A 的基数 $\leqslant 2^{\aleph}$.

另一方面，$[0, 1]$的每个子集 B 对应于一个函数（即 3.1 节所说的特征函数）：

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{若 } x \in B; \\ 0, \text{若 } x \notin B. \end{cases}$$

对应是一一的. 因此 A 的基数 $\geqslant 2^{\aleph}$.

综合以上两方面即得 A 的基数为 $2^{\aleph}$.

例 8 可数个基数为$\aleph$的集，它们的并集基数为$\aleph$，即上节例 6"两两不相交"的条件可以取消.

解 设 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 中每一个 E_i 的基数为$\aleph$. 显然 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 的基数 $\geqslant E_1$ 中的基数$\aleph$.

另一方面，将 $E_2 \cap E_1$ 中每个元素 a_1 换成一个新元素 a_1'，将 $E_3 \cap (E_2 \cup E_1)$ 中每个元素 a_2 换成新元素 a_2'，……得到集 E_1，F_2，F_3，…，每两个无公共元素，并且 $F_2 \sim E_2$，$F_3 \sim E_3$，……　基数均为$\aleph$. 因此由上节例 6，$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ 的基数为$\aleph$. 又显然有 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 的基数 $\leqslant \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ 的基数$\aleph$.

因此 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 的基数 $= \aleph$.

例 9 c 个基数为$\aleph$的集，它们的并集基数为$\aleph$.

解 可设各集两两不相交（否则用例 8 的方法处理）. 每一个集对等于平面上一条直线 $y =$ 常数. 它们的并集对等于整个平面.

5.5　直线上的开集与闭集

直线是一维点集. 如果以这直线为数轴，那么直线上的每

一点对应于一个实数(所以称为一维).

设 E 是(直线上的)一个点集. 对于一点 x_0,如果 E 中有一个区间含有 x_0,那么称 x_0 为点集 E 的内点. 这时 x_0 本身当然属于 E.

如果 E 中每一个集都是 E 的内点,那么 E 称为开集.

显然开区间 (a, b) 是开集. 直线本身是开集. 闭区间 $[a, b]$ 不是开集,因为端点 a 与 b 不是 $[a, b]$ 的内点.

空集算作开集.

例 1 任意多个开集的并集是开集.

解 设 $S=\bigcup\limits_{\alpha} E_\alpha$,其中每个 E_α 都是开集.

对任一点 $x_0 \in S$,x_0 必属于某个 E_α. 因为 E_α 是开集,所以有区间 $(c, d) \subseteq E_\alpha$,并且 $x_0 \in (c, d)$. 于是 $x_0 \in (c, d) \subseteq S$,$x_0$ 是 S 的内点.

由于 S 的任一点都是内点,所以 S 是开集.

例 2 有限个开集的交集是开集.

解 设 $P=\bigcap_{k=1}^{n} E_k$,其中每个 E_k 是开集.

对任一点 $x_0 \in P$,x_0 必属于每个 E_k,并且有区间 $(c_k, d_k) \subseteq E_k$,$x_0 \in (c_k, d_k)$,$k=1, 2, \cdots, n$. 令

$$c=\max c_k(<x_0), \quad d=\min d_k(>x_0),$$

则 $x_0 \in (c, d)$,并且 $(c, d) \subseteq E_k \quad (k=1, 2, \cdots, n)$.

从而 $x_0 \in (c, d) \subseteq P$. 所以 P 是开集.

注意无限多个开集的交未必是开集,如

$$E_k=\left(-1-\frac{1}{k}, 1+\frac{1}{k}\right), k=1, 2, \cdots$$

则

$$P=\bigcap_{k=1}^{\infty} E_k=[-1, 1]$$

不是开集.

可以证明直线上的每个开集都是不相重叠的开区间的并集(下节例1).

设E是一点集. 对于一点x_0,如果任一个含有x_0的区间,除x_0外至少还含有E的一点,那么x_0称为E的极限点或聚点.

注意E的极限点x_0本身不一定属于E. 如果x_0是E的极限点,那么含x_0的区间内必有无限多个E的点(设含x_0的区间(a, b)中有$x_1, x_2, \cdots, x_k$属于E. 又设$\delta = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant k} |x_0 - x_i|$,则含$x_0$的区间$(x_0-\delta, x_0+\delta)$中的点均不同于$x_1, x_2, \cdots, x_k$. 而这个区间$(x_0-\delta, x_0+\delta)$中又有一点$x_{k+1}\in E$并且$x_{k+1}\neq x_0$. 这样,$(a, b)$中有无穷多个点$x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}, \cdots$属于$E$).

如果$x_0\in E$,并且x_0不是E的极限点,那么x_0称为E的孤立点. 如果x_0是E的孤立点,那么必有一个区间(c, d),在(c, d)中只有一个点即x_0属于E.

如果E的极限点都属于E,那么E称为闭集.

显然闭区间是闭集;直线本身是闭集. 开区间(a, b)不是闭集,因为a, b是(a, b)的极限点,它们不在(a, b)中. 一个点所成的集也是闭集. 空集$\varnothing$算作闭集. 又开又闭的集只有全直线与空集. $[a, b)$非开非闭.

例3 开集的补集是闭集,闭集的补集是开集.

解 设E为开集. 对任一点$x_0\in E$,必有区间$(a, b)\subseteq E$, $x_0\in(a, b)$. 这时(a, b)中每一个点都不属于E'. 因此x_0不是E'的极限点. 从而E'的极限点都属于E', E'是闭集.

设E为闭集. E'中的任一点x_0不是E的极限点,因而必有区间(c, d), (c, d)含x_0并且(c, d)中没有E的点,即

$(c, d) \subseteq E'$. 从而 x_0 是 E' 的内点. E' 是开集.

由例 3、例 1、例 2 可知：

任意多个闭集的交是闭集；

有限多个闭集的并是闭集.

5.6 Cantor 的完备集

Georg Cantor(1845. 3. 3.—1918. 1. 6)是集合论的创始者，丹麦一位犹太商人的儿子，出生在彼得堡，1856 年移居德国，1874 年，开始引入基数的概念，由此证明了超越数大大多于代数数(5.3 节例 4). 这一成果当时轰动了整个数学界，同时也遭到强烈的反对. Dedekind, Mittag-Leffler 等人支持他，而 Kronecker 等的反对使他十分苦恼. 他注意到在其他数学分支，例如概率论的历史中，也存在正确的理论未被普遍接受的时期，因而高喊"数学的本质在于它的自由化".

Cantor 还定义了序型，超限序数等概念，并奠定了由基本序列建立实数理论的基础，他将欧氏空间里一般的点集作为研究的对象，定义极限点、闭集、开集等概念. 他也是维数理论的开拓者，为点集理论与拓扑空间理论开辟了道路.

Cantor 晚年病魔缠身，在精神病院去世.

本节着重介绍 Cantor 构造的一个完备集.

例 1 证明直线上每一个非空的有界开集 G 可以表为有限个或可数个不相重叠的开区间的并集.

解 对任一点 $x \in G$，因为 G 是开集，所以 x 是内点，存在一个开区间 (a, b) 包含 x，并且 $(a, b) \subseteq G$. 可以这样取区间 (a, b)，使得 $a, b \notin G$ (例如 b 可这样产生：设 $(x, b_1) \subseteq G$，并且 b_1 为有理数 $m + 0.c_1c_2\cdots c_n$，$m \in \mathbf{Z}$，$c_1, c_2, \cdots, c_n \in$

$\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$. 可设 $\left(x, b_1+\frac{1}{10^n}\right)$ 不含在 G 中 $\left(\text{否则用 } b_1+\frac{1}{10^n} \text{ 代替 } b_1\right)$. 令 $b_2=b_1+\frac{c_{n+1}}{10^{n+1}}$, $c_{n+1}\in\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$, 使得 $(x, b_2)\subseteq G$ 而 $\left(x, b_2+\frac{1}{10^{n+1}}\right)$ 不含于 G. 这样继续下去, 得出一个数 $b=m+0.c_1c_2\cdots c_nc_{n+1}\cdots$. 任一小于 b 而大于 x 的数 y 或小于 b_1; 或不小于 b_1 但至少有一位小数小于 b 的相应数字, 从而 y 小于那个直到这一位都与 b 相同的 b_k. 因此 $y\in G$. 这表明 $(x, b)\subseteq G$. 另一方面, G 的补集 G' 是闭集. $\left[b_1, b_1+\frac{1}{10^n}\right)$, $\left[b_2, b_2+\frac{1}{10^{n+1}}\right)$, ……中各有一个点 $\in G'$, b 是它们的极限点, 因而 $b\in G'$, 即 $b\notin G$. 这样的区间 (a, b), 称为 G 的构成区间. 它们是包含 x 的、完全在 G 内的最大的开区间.

根据定义, 这些构成区间不相重叠.

对每一个构成区间, 取这区间中任一有理数与之对应. 由于区间互不重叠, 这些有理数各不相同. 有理数的全体是可数集, 因此 G 的构成区间个数为有限或可数.

例 2 将闭区间 $[0, 1]$ 三等分, 取去中间的开区间 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. 将每一个留下来的闭区间 $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ 又各等分为三等分, 并各取去中间的开区间 $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ 与 $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$. 再将每一个留下来的闭区间三等分并取去中间的开区间. 这样无限继续下去. 留下的集记为 P. 证明:

(i) P 是闭集, 并且没有孤立点;

(ii) 点集 P 的基数是 $\aleph$,

解 (i) 去掉了可数个开区间，这些开区间的并集是一个开集 G. G'是闭集，所以 $P = G' \cap [0, 1]$ 是闭集.

如果 0 是 P 的孤立点，那么在 0 的一个邻域中，0 右边的点均属于 G. 从而 0 是 G 的一个构成区间的端点. 但由 P 与 G 的构造，G 的每一个构成区间是 $\left[0, \frac{1}{3^n}\right]$ 的中间部分 $\left(\frac{1}{3^{n+1}}, \frac{2}{3^{n+1}}\right)$ 或属于 $\left[\frac{1}{3^n}, 1\right]$，因而 0 不是构成区间的端点. 这一矛盾表明 0 不是 P 的孤立点. 同样 1 也不是 P 的孤立点.

对于 $x \in (0, 1)$，如果 x 是 P 的孤立点，那么必有含 x 的区间 $(a, b) \subseteq [0, 1]$，(a, b)中仅有 $x \in P$. 因而 x 是 G 的两个构成区间的公共点. 但由 G 的构造，每两个构成区间没有公共点. 所以 P 没有孤立点.

(ii) 用三进制小数 $0.a_1a_2\cdots$ 表示$[0, 1]$中的数. 去掉$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$，即去掉那些 a_1 必定为 1 的数 $\left(\frac{1}{3} = 0.100\cdots = 0.022\cdots, \frac{2}{3} = 0.122\cdots = 0.200\cdots\right.$，它们的小数第一位都可以不为 1$\left.\right)$. 去掉$\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$与$\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$即去掉那些 a_2 必定为 2 的数. 依此类推，从而

$$P = \{0.a_1a_2\cdots \mid a_k = 0 \text{ 或 } 2, k = 1, 2, \cdots\}.$$

令

$$b_k = \begin{cases} 0, \text{若 } a_k = 0; \\ 1, \text{若 } a_k = 2. \end{cases} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

则 $0.a_1a_2\cdots \longmapsto 0.b_1b_2\cdots$ 是 P 到$[0, 1]$中的数(用二进制小

数表示）的一一对应. 所以 P 的基数为 $\aleph$.

没有孤立点的闭集（即每一点都是极限点的闭集）称为完备集. 例 2 是 Cantor 发明的完备集, 通常称为 Cantor 的完备集.

有趣的是，在例 2 中去掉的区间总长为

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\cdots=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}}=1.$$

因而剩下的 Cantor 完备集 P 的"长度"（或称为测度）为 0，但它的基数却是 $\aleph$.

5.7 Kuratowski 定理

拓扑学中有一著名的 Kuratowski 闭包定理：由集 A 经过补与闭的运算，至多产生 14 个集.

这里的闭运算可以定义为集族上的函数.

设 $\mathscr{A}$ 为集 X 的全部子集所成的族. 函数

$$f:\mathscr{A}\to\mathscr{A}$$

如果满足以下条件：

(1) 若集 $A\subseteq B$，则 $f(A)\subseteq f(B)$；

(2) $f(A)\supseteq A$；

(3) $f(f(A))=f(A)$；

(4) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$，

那么便称 f 为闭运算.

其中性质(1)，(2)，(3)，(4)分别称为单调增，扩大，幂等，可加.

同样地，可以定义补运算.

如果 $g: \mathscr{A} \to \mathscr{A}$,满足:

(1) 若集 $A \subseteq B$, 则 $g(A) \supseteq g(B)$;

(2) $g(A) \cap A = \varnothing$;

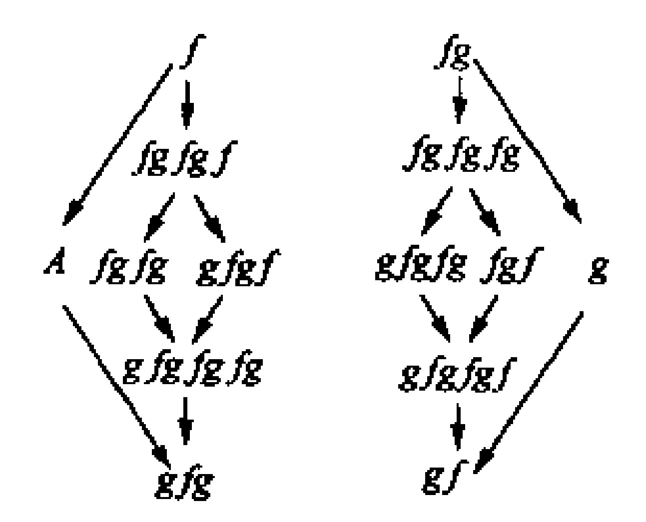
(3) $g(g(A)) = A$;

(4) $g(A \cup B) = g(A) \cap g(B)$,

那么便称 g 为补运算. 其中性质(1), (3)分别称为单调减,幂零.

显然,通常集的补集与闭包具有以上性质.

现在,我们证明 Kuratowski 定理. 为此先建立两个图:



其中 f 是 $f(A)$的简写, $fgfgf$ 是 $f(g(f(g(f(A)))))$的简写等等. $B \to C$ 即 $B \supseteq C$.

左图的关系建立如下:

(1) 由 $g \subseteq fg$ 得 $A \supseteq gfg$;

(2) 由 $f \supseteq gfg(f)$ 得 $f \supseteq fgfgf$;

(3) 易知 gfg 是单调增的. 因而,由 $f \supseteq A$ 得 $gfgf \supseteq gfg$, 从而 $fgfgf \supseteq fgfg$;

(4) $gfgfgfg = gfg(fgfg) \subseteq gfg(f) = gfgf$;

(5) $gfgfgfg = gfg(fgfg) \subseteq fgfg$;

(6) 由 $f(gfg) \supseteq gfg$ 得 $gfgfg \subseteq fg$, 从而 $gfgfgfg \supseteq gf(fg) = gfg$.

将 g 作用于左图，就产生右图.

在左、右两个图中已有 14 个集. 未在图中出现的、由复合而得接下去的两个集应当是 $fgfgfgf$ 与 $fgfgfgfg$. 我们证明：

(1) $fgfgfgf = fgf$.

事实上，由右图

$$fgfgfgf = f(gfgfgf) \supseteq f(gf) = fgf;$$

由左图

$$fgf = f(gf) \supseteq fgfgf(gf) = fgfgfgf.$$

(2) $fgfgfgfg = fgfg$.

由(1)(将 A 换作 $g(A)$)，

$$fgfgfgfg = fgfgfgf(g) = fgf(g) = fgfg.$$

于是，用 f, g 复合，除图中 14 个集外，不能产生其他的集.

注：在上述证明中，只利用 f 的性质(1)，(2)，(3)，g 的性质(1)，(3).

例 1 举出一个集 A，它经过 f, g 的复合恰好产生 14 个不同的集.

解 首先注意上面左图(简称左图)的任一集不与右图的集相等. 否则，左图的最大集 f 包含右图的最小集 gf，产生矛盾.

如果左图的 7 个集两两不同，那么它们的补集，即右图的 7 个集也两两不同. 因此，只要左图的 7 个集两两不同，结合右图，我们就得到 14 个两两不同的集.

设 $X = [1, 5]$,

$$A = \{[1, 2]\text{中的有理点}\} \cup [2, 3) \cup (3, 4] \cup \{5\}.$$

则左图的其他六个集合为：

$$f = [1, 4] \cup \{5\},$$
$$gfg = (2, 3) \cup (3, 4),$$
$$fgfg = [2, 4],$$
$$gfgfgfg = (2, 4),$$
$$gfgf = [1, 4),$$
$$fgfgf = [1, 4].$$

左图这 7 个集两两不同，因此它们与右图的 7 个集构成 14 个不同的集.

Kuratowski 定理有许多推广，下面举一个关于自然数的问题.

例 2 对自然数集 $\mathbf{N}$ 的任一子集 A，我们令 $g(A) = \mathbf{N} - A$，$f(A) = \langle A \rangle$，这里 $\langle A \rangle$ 表示 A 经乘法生成的集，即

$$\langle A \rangle = \{\text{任意多个 } A \text{ 中元素(允许相同)相乘的积}\}.$$

(单独一个元素也算作积，所以 $\langle A \rangle \supseteq A$.)

显然 f 具有单调增、扩大、幂等这三个性质. 于是，根据前面的证明，由 f，g 复合，至多产生 14 个不同的集.

我们可以举例表明的确能得出 14 个不同的集.

取 $A = \{2, 2 \times 3, 2 \times 5, 2 \times 3 \times 5, 3^3\}$，则

$$gfg = \{2, 2 \times 3, 2 \times 5, 2 \times 3 \times 5\} \neq A.$$

$3^3 \in f$，$3 \notin f$，$3 \in gf$，$3, 3^2, 3^3 \in fgf$，$3, 3^2, 3^3 \notin fgfgf$，所以 $fgfgf \neq f$.

$(2 \times 3 \times 5)^2 \in fgfg$；$2 \times 3^2, 2 \times 5^2 \notin f$，所以 $2 \times 3^2, 2 \times 5^2 \in gf$，$(2 \times 3^2) \times (2 \times 5^2) \in fgf$，即 $(2 \times 3 \times 5)^2 \in fgf$，$(2 \times 3 \times 5)^2 \notin gfgf$.

$2^2 \times 3^3 \notin f(gfg) = fgfg$；$2^2 \times 3^3 \in f$，并且若 $2^2 \times 3^3$

$= n_1 n_2 \cdots n_k \quad (k \geqslant 2)$，则至少有一个 n_i 中 3 的幂指数不大于 2 的幂指数，因而这个 $n_i \in f$. 从而 $n_i \notin gf$. $2^2 \times 3^3 \notin fgf$, $2^2 \times 3^3 \in gfgf$.

综合以上两段，$fgfg$ 与 $gfgf$ 不可比较，从而 $fgfg$，$gfgf$，$fgfgf$，$gfgfgfg$ 两两不等.

$2, 2^2, 2^3, \cdots \in fgfg$；$2, 2^2, 2^3, \cdots \notin gfgfg$；$2, 2^2, 2^3, \cdots \notin fgfgfg$；$2, 2^2, 2^3, \cdots \in gfgfgfg$. 所以 $gfgfgfg$，$fgfg$，$gfgf$，$fgfgf$，f 都是无穷集，不与有限集 A，gfg 相等.

于是左图的 7 个集各不相同. 它们的补集即右图的 7 个集也各不相同.

左图的任一集决不可能等于右图的集. 如果这种情况发生，左图的最大集 f 包含右图的最小集 gf，产生矛盾.

因此，由 $A = \{2, 2\times3, 2\times5, 2\times3\times5, 3^3\}$ 经 f, g 复合可产生 14 个不同的集.

下面再举两种 Kuratowski 定理的推广.

例 3 设 t 为区间$[0, 1]$中的实数，定义

$$g(t) = 1 - t.$$

显然 g 具有单调减、幂零这两个性质. 又设函数 f: $[0, 1] \to [0, 1]$满足：

(1) 单调增；

(2) $f(t) \geqslant t$；

(3) $f(f(t)) = f(t)$.

则根据前面的证明（将 $\subseteq$ 改为 $\leqslant$），g 与 f 复合，至多产生 14 个不同的函数.

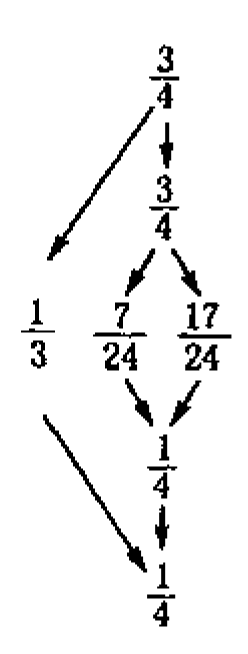
为了举出恰好产生 14 个不同函数的例子，首先注意$f(t)$

的像集必为一些点或一些区间组成，在每一个区间上，$f(t) = t$. 若(c, d)内的点不属于$f(t)$的像集，而c, d属于$f(t)$的像集，那么$f(c) = c$, $f(d) = d$, 并且在(c, d)上恒有$f(t) = d$.

现在令

$$f(t)=\begin{cases}\frac{1}{6}, t\in\left[0, \frac{1}{6}\right];\\ \frac{7}{24}, t\in\left(\frac{1}{6}, \frac{7}{24}\right];\\ \frac{3}{4}, t\in\left(\frac{7}{24}, \frac{3}{4}\right];\\ \frac{7}{8}, t\in\left(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right];\\ 1, t\in\left(\frac{7}{8}, 1\right].\end{cases}$$

则当$t = \frac{1}{3}$时，左图中各函数的值为：



而当 $t\in\left(\frac{7}{8}, 1\right)$ 时，$f(t)=1$，

$$fgfgf = fgf(0) = fg\left(\frac{1}{6}\right)= f\left(\frac{5}{6}\right)= \frac{7}{8}.$$

当 $t<\frac{1}{8}$ 时，$gfg=0$，

$$gfgfgfg = gfgfg(1) = gfg\left(\frac{1}{6}\right)= \frac{1}{8}.$$

于是左图中 7 个函数各不相同，这时右图中 7 个函数也各不相同（用 1 减去左图的函数就得出右图中相应的函数）.

左图中的函数决不可能与右图中的函数相同. 否则将导出 $f\geqslant gf$ 恒成立. 但在 $t\leqslant\frac{1}{6}$ 时，$f(t)=\frac{1}{6}<gf=\frac{5}{6}$.

因此，我们得到 14 个不同的函数.

例 4 设数轴上的点所成的集为 X，g_1 是关于原点的对称. $f_1: X\to X$，满足：

(1) 单调增（点的大小顺序即相应的实数大小顺序）；

(2) $f_1(t)\geqslant t$；

(3) $f_1(f_1(t))=f_1(t)$，

则由 f_1 与 g_1 复合，至多产生 14 个不同的函数.

将例 3 中的自变量 t 改为 $t-\frac{1}{2}$ (即将原点移至原来的点 $\frac{1}{2}$ 处)，则在那里的 g 就是现在的 g_1 $\left(t\in\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$.

令 $f_1(t)=f\left(t+\frac{1}{2}\right)$，$t\in\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$；并且在 $t\notin\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 时，$f(t)=t$，则经 g_1，f_1 复合恰产生 14 个不同

的函数.

例 5 平面上的点所成的集为 X. 对于任两个点 (a_1, b_1), (a_2, b_2), 约定当 $a_2 > a_1$ 或 $a_2 = a_1$, $b_2 > b_1$ 时,

$$(a_1, b_1) < (a_2, b_2).$$

如果 g 是关于原点的对称, 而 $f_2: X \to X$, 满足:

(1) 单调增;

(2) 对任一点 t, $f_2(t) \geqslant t$, $f_2(f_2(t)) = f_2(t)$,

那么由 f_2 与 g 复合, 至多产生 14 个不同的函数.

我们可以令 $f_2((a, b)) = (f_1(a), b)$, 以产生 14 个不同的函数.

例 6 平面上的整点所成的集为 X, 大小顺序及 g, f_2 均与例 5 相同. 试举一个 f_2 的实例, 产生 14 个不同的函数.

这只需令 $f_2((a, b)) = \left(24 f_1\left(\frac{a}{24}\right), b\right)$.

习　　题

1. 已知 $A \cup B \cup X = A \cup B$, $A \cap X = B \cap X = A \cap B$. 证明集合 $X = A \cap B$.

2. 用 $n(A)$表示 A 的子集的个数. 已知 $|A| = |B| = 100$, $n(A) + n(B) + n(C) = n(A \cup B \cup C)$. 求 $|A \cap B \cap C|$ 的最小值.

3. 从自然数数列 1, 2, 3, 4, 5, …中依次划去 4 的倍数,7 的倍数,但其中凡 5 的倍数均保留不划去,剩下的数中第 1995 个是多少?

4. 在正 $6n+1$ 边形中,k 个顶点染红色,其余顶点染蓝色. 证明具有同色顶点的等腰三角形的个数 P_k 与染色方式无关,并且 $P_{k+1} - P_k = 3k - 9n$, 从而求出 P_k.

5. 证明:

$$
\begin{aligned}
&|A_1 \triangle A_2| + |A_2' \triangle A_3| - |A_1' \triangle A_3| \\
&= 2|A_1 \cap A_2' \cap A_3'| + 2|A_1' \cap A_2 \cap A_3|.
\end{aligned}
$$

6. 证明:

$$\sum_{A_1, \cdots, A_k} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| = n(2^k - 1)2^{k(n-1)}.$$

这里的求和遍及 n 元集 X 的所有子集 $A_1, A_2, \cdots, A_k$,其中允许有空集与相同的集,并且计及顺序(即 $A_1 \neq A_2$ 时, $A_1 \cup A_2$ 与 $A_2 \cup A_1$ 算作不同的).

7. 证明:

$$\sum |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| = (2^k - 1)\sum |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_k|.$$

和号意义同上题.

8. $m > n$, $A = \{1, 2, \cdots, m\}$, $B = \{1, 2, \cdots, n\}$, 求满足 $C \subseteq A$, $C \cap B \neq \varnothing$ 的 C 的个数.

9. $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ 是 n 元集 X 的子集族,对 $1\leqslant i<j\leqslant m$, $A_i\cup A_j\neq X$, 证明 $m\leqslant 2^{n-1}$. 并且在 $m<2^{n-1}$ 时,一定能补充若干个子集到 $\mathscr{A}$ 中,使得 $|\mathscr{A}|=2^{n-1}$, 同时 $\mathscr{A}$ 中每两个子集的并不是 X.

10. 证明 n 元集 X 的满足 $A\subset B$ 的子集对 A, B 共有 3^n-2^n 对.

11. 已知集 S 中的元素均为正实数,S 对加法封闭(即 a, $b\in S$ 时, $a+b\in S$),并且对任意区间 $[a, b]$ $(a>0)$, 均有区间 $[c, d]\subseteq[a, b]\cap S$. 试确定 S.

12. 设 A, B 都是集 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集. 如果 A 中的每一个数都严格地大于 B 中的所有的数,那么有序子集对 (A, B) 称为"好的". 求 X 的"好的"子集对的个数.

13. 数轴上 n 个有界闭区间,其中任 k 个中均有两个无公共点. 证明其中至少有 $\left[\frac{n-1}{k}\right]+1$ 个两两不相交.

14. 25 位绅士围一圆桌而坐. 他们中有些人属于一些团体. 同一团体的绅士相邻而坐,并且

(i) 每个团体至多 9 个人;

(ii) 每两个团体至少有一个公共成员.

证明有一位绅士属于所有团体.

15. 设 $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 是集 X 的 r 元子集的族. 若 $\mathscr{A}$ 中每 $r+1$ 个集的交非空,证明交 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_t\neq\varnothing$.

16. $\mathscr{A}$ 为 X 的子集族, $|\mathscr{A}|=t\geqslant 2$. 证明形如 $A\triangle B$ $(A, B\in\mathscr{A})$ 的子集中,至少有 t 个互不相同.

17. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个两两不同的集. $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_r}\}$ 为这族集中不含并集的最大子族(不含并集即对任意不同的 j, s, $t\in\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$, $A_j\cup A_s\neq A_t$). 对一切 $A_1, A_2, \cdots, A_n$, 令 $f(n)=\min r$. 证明:

$$\sqrt{2n}-1\leqslant f(n)\leqslant 2\sqrt{n}+1.$$

18. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都是 r 元集. $\bigcup_{i=1}^{n} A_i=X$. 若对自然数 k, 这族集中每 k 个的并为 X, 每 $k-1$ 个的并为 X 的真子集. 证明: $|X|\geqslant$

C_n^{k-1}. 等号成立时，必有 $r = C_{n-1}^{k-1}$.

19. $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 都是 r 元集，$X = \bigcup_{i=1}^{t} A_i$，求 $\min|X|$. 这里最小值是对所有 $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 的 $|X|$ 的最小值.

20. 设 $\{A_i\}_{1 \leqslant i \leqslant m}$，$\{B_i\}_{1 \leqslant i \leqslant m}$ 是两族集，具有性质 $|A_1| = |A_2| = \cdots = |A_m| = p$，$|B_1| = |B_2| = \cdots = |B_m| = q$，并且当且仅当 $i = j$ 时，$A_i \cap B_j = \varnothing$. 证明：$m \leqslant C_{p+q}^{p}$.

21. n 元集 X 的非空子集族 $\mathscr{A}$ 称为滤子族，如果对每对 A, $B \in \mathscr{A}$，存在 $C \in \mathscr{A}$，使得 $C \subset A \cap B$. 求滤子族的个数.

22. 设 $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 是集 X 的 r 元子集的族，$t \leqslant 2^{r-1}$. 证明可将 X 的元素各染成两种颜色之一，使得每个 $A_i (1 \leqslant i \leqslant t)$ 的元素不全同色.

23. 设 $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 是集 X 的子集族，满足 $|A_i| \geqslant 2$ 并且 $|A_i \cap A_j| \neq 1$ $(i, j = 1, 2, \cdots, t, i \neq j)$. 证明可将 X 的元素各染成两种颜色之一，使得每个 $A_i (1 \leqslant i \leqslant t)$ 的元素不全同色.

24. 设 X 为 n 元集. $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 是 X 的子集族，对所有 $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant t$, $|A_i \cap A_j| = 1$. 证明：$t \leqslant n$.

25. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 与 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是集 X 的两个分拆. 并且当 $A_i \cap B_j = \varnothing$ 时，$|A_i \cup B_j| \geqslant n$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$. 求证：$|X| \geqslant \frac{n^2}{2}$. 并说明在 n 为偶数时，等号可以成立.

26. $\mathscr{A}$ 是 n 元集 X 的一个子集族. 若 X 的每个子集 B 至少与 $\mathscr{A}$ 中一个子集 A 可比较(即 $B \subseteq A$ 或 $A \subseteq B$)，则称 $\mathscr{A}$ 为横截族. 设 $\mathscr{A}$ 为最小的横截族(即 $\mathscr{A}$ 为横截族而 $\mathscr{A}$ 的子族均非横截族)，证明：$|\mathscr{A}| \leqslant C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

27. $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集族 $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 称为完全可分的，如果对任意的 i, j $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$，存在 A_k, $A_h \in \mathscr{A}$，使得 $i \in A_k - A_h$, $j \in A_h - A_k$. 对任一集族 $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$，定义 $B_i = \{k \mid i \in A_k\}$，产生一个 $\{1, 2, \cdots, t\}$ 的子集族 $\mathscr{A}^* = \{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$，$\mathscr{A}^*$ 称为 $\mathscr{A}$ 的对偶. 证明当且仅当 $\mathscr{A}^*$ 是 S 族时，$\mathscr{A}$ 完全可分.

28. X 的子集族 $\mathscr{A}$ 是 S 族，令 $b(\mathscr{A})$ 为 X 的所有与 $\mathscr{A}$ 中每一子集都相交的最小集组成的族. 证明：$b(b(\mathscr{A}))=\mathscr{A}$.

29. 任意 t 个集 $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 中，总能找出 $[t^{\frac{1}{2}}]$ 个，每两个的并不等于第三个.

30. 设 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ 为 n 元集 X 的子集族，$\mathscr{A}$ 中的每个子集 A 与 $\mathscr{B}$ 中的每一个子集 B 均不可比较. 证明：$\sqrt{|\mathscr{A}|}+\sqrt{|\mathscr{B}|}\leqslant 2^{\frac{n}{2}}$.

31. 研究 4.11 节例 1(4)中等号成立的情况.

32. 列出 5.7 节例 1 中右图的 7 个集.

33. 建立区间 (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ 与 $[0, 1]$ 的一一对应.

34. 对集合 $A_1, A_2, \cdots$，令 $\overline{A}=\bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{n=m}^{\infty}A_n\right)$, $\underline{A}=\bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\left(\bigcap\limits_{n=m}^{\infty}A_n\right)$. 证明：$\overline{A}\supseteq\underline{A}$. 举一个 $\overline{A}\supset\underline{A}$ 的例子.

35. 设 X 为 n 元集，Y 为 X 的 k 元子集，证明 X 的恰含 Y 中 r 个元的子集，所成的最大的 S 族由 $C_k^r C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}$ 个子集组成.

36. 考虑 n 元集 X 到自身的映射 $f(n\geqslant 2)$. 若 a 为 X 中一固定元素，对每个 $x\in X$, 均有 $f(f(x))=a$. 求这种映射 f 的个数.

37. 设 $x=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 为两个 n 维向量. 若 $x=y$ 或 $x_i=y_i$ 对 $n-1$ 个 i 成立，则称 y 覆盖 x. 令 X 表示 p^n 个向量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $x_i\in\{1, 2, \cdots, p\}$, $i=1, 2, \cdots, n$ 的集. 若 X 中每个向量至少被 Y 中一个向量覆盖. 求证：$|Y|\geqslant\dfrac{p^n}{n(p-1)+1}$, 并且当 $n=2$ 时，$\min|Y|=p$.

38. 设 X 为 n 元集，$n\geqslant 4$, $A_1, A_2, \cdots, A_{100}$ 为 X 的子集，其中可以有相同的，满足 $|A_i|>\dfrac{3}{4}n$, $i=1, 2, \cdots, 100$. 证明存在 $Y\subseteq X$, $|Y|\leqslant 4$ 并且 $Y\cap A_i\neq\varnothing$, $i=1, 2, \cdots, 100$.

39. X 为 n 元集，$n\geqslant 2$, $\mathscr{A}$ 为 X 的子集族. 若 X 的每个真子集与 $\mathscr{A}$ 中偶数个集的交非空，证明 X 的所有非空子集均在 $\mathscr{A}$ 中.

40. 集 X 的元数 $n>1$, 并且有一关系 $\wedge$，满足：

(1) 对任一 $x\in X$, $x\wedge x$ 不成立；

(2) 对任一对不同元素 $x, y \in X$，$x \wedge y$ 与 $y \wedge x$ 恰有一个成立；

(3) 若 $x \wedge y$，则有 $z \in X$，使得 $x \wedge z$，$z \wedge y$.

问 X 至少有几个元素？

习 题 解 答

1. 由 $A\cap X=A\cap B$ 得 $X\supseteq A\cap B$. 由 $A\cup B\cup X=A\cup B$ 得 $X\subseteq A\cup B$, 此式及 $A\cap X=A\cap B$ 得 $X\subseteq B$. 同理 $X\subseteq A$. 因此 $X\subseteq A\cap B$. 综合起来得 $X=A\cap B$.

2. 设 $|C|=c$, $|A\cup B\cup C|=d$, 则 $2^{100}+2^{100}+2^c=2^d$, 即 $2^{101}+2^c=2^d$. 显然 $d>c$ 与 101,因此 $2^{101}\mid 2^c$, $2^c\mid 2^{101}$, 从而 $c=101$, $d=102$. $A\cap B$ 至少有 $100+100-102=98$ 个元,其中至多有 $102-101=1$ 个元不属于 C. 所求最小值为 $98-1=97$.

3. 可按 1.11 节例 4 解.

另一种解法:4, 5, 7 的最小公倍数为 140. 由中国剩余定理(孙子定理),1 至 140 中的数可唯一地表示成 (a, b, c) 的形式,其中 a, b, c 分别为该数除以 4, 5, 7 的余数. 保留的数有 $(a, 0, c)$ 及 (a, b, c), $b\neq 0$ 两种. 前者 $a\in\{0, 1, 2, 3\}$, $c\in\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 共 $4\times 7=28$ 个; 后者 $a\in\{1, 2, 3\}$, $b\in\{1, 2, 3, 4\}$, $c\in\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 共 $3\times 4\times 6=72$ 个. 因此 1 至 140 中共留下 $28+72=100$ 个数, 其中最大的五个数为 140, 139, 138, 137, 135. 在前 $140\times 20=2800$ 个自然数中留下 $100\times 20=2000$ 个数. 因此第 1995 个数是 $2800-(140-135)=2795$.

4. 设 P_k 与染色方式无关. 现在增加一个红点 A,以 A 为顶点的等腰三角形中,设顶点全红的有 a_3 个,两个红点的 a_2 个,一个红点的 a_1 个,则 $a_1+a_2+a_3=9n$(其中 $3n$ 个以 A 为尖,$6n$ 个不以 A 为尖), $a_2+2a_3=3k$(另一不同于 A 的红点有 k 种取法,这点与 A 可作为三个等腰三角形的两个顶点. 这样组成的等腰三角形中,每个顶点全红的三角形被计算了两次). 由以上两方程得 $a_3-a_1=3k-9n$. 而增加红点 A 时,同色顶点的等腰三角形的个数 P_k 增加 a_3,减少 a_1(增加 a_3 个顶点全红

的，减少 a_1 个顶点全蓝的等腰三角形）．因此 P_{k+1} 与染色方式无关，并且 $P_{k+1}-P_k=a_3-a_1=3k-9n$．由于 $P_0=3n(6n+1)$，所以 $P_k=P_0-9kn+3\sum_{i=1}^{k}i=3n(6n+1)-9kn+\frac{3}{2}k(k-1)$．

5. 左边 $=|A_1|-|A_1\cap A_2|+|A_2|-|A_1\cap A_2|+|A_2'|-|A_2'\cap A_3|+|A_3|-|A_2'\cap A_3|-|A_1'|-|A_3|+2|A_1'\cap A_3|$

$=2(|A_1|-|A_1\cap A_2|-|A_2'\cap A_3|+|A_1'\cap A_3|)$

$=2(|A_1\cap A_2'|-|A_2'\cap A_3|+|A_1'\cap A_3|)$

$=2(|A_1\cap A_2'|-|A_1\cap A_2'\cap A_3|-|A_1'\cap A_2'\cap A_3|+|A_1'\cap A_3|)$

$=2(|A_1\cap A_2'\cap A_3'|+|A_1'\cap A_2\cap A_3|)$．

6. X 有 2^n 个子集，每个均可作为 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 中的任一个，因此和共 $(2^n)^k$ 项．不含 i 的子集共 2^{n-1} 个 $(1\leqslant i\leqslant n)$，因此 i 不在 $(2^{n-1})^k$ 项出现，即 i 对和的贡献是 $(2^n)^k-(2^{n-1})^k$．从而和为 $n(2^{nk}-2^{(n-1)k})$．

7. 右边的和 $=\sum|A_1'\cap A_2'\cap\cdots\cap A_k'|$

$$=\sum|(A_1\cup\cdots\cup A_k)'|$$

$$=\sum(n-|A_1\cup\cdots\cup A_k|)$$

$$=n\cdot 2^{nk}-n(2^{nk}-2^{(n-1)k})=n\cdot 2^{(n-1)k}.$$

从而两边相等．

8. C 不是 $\{n+1, n+2, \cdots, m\}$ 的子集，这样的子集有 2^{m-n} 个，因此 C 有 2^m-2^{m-n} 个．

9. $A_i\cup A_j\neq X$ 即 $A_i'\cap A_j'\neq\varnothing$，由 4.5 节例 1，$A_1', A_2', \cdots, A_m'$ 的个数 $m\leqslant 2^{n-1}$，并且可以补充若干个 A_k'，使每两个交非空的集增加到 2^{n-1} 个．从而对 $\mathscr{A}$ 结论成立．

10. $(X-B)\cup(B-A)\cup A$ 是 X 的一个分拆．因此 X 的每个元可以属于三者之一，共有 3^n 种上述分拆，其中 $B-A=\varnothing$ 的有 2^n 种，应当排除．

11. 对任一正实数 t，取正实数 $s<t$．由已知，存在区间 $[c, d]\subseteq[s, t]\cap S$．

在区间 $[t-d, t-c]$ $\left(这是关于[0, t]的中点\frac{t}{2}，与[c, d]对称的区间\right)$中，由已知，存在区间 $[e, f] \subseteq S$.

$t-e$ $\left(e关于\frac{t}{2}的对称点\right)$在区间$[c, d]$中，因而 $t-e \in S$.

由加法封闭性，$t = e + (t-e) \in S$.

所以 S 由全体正实数组成.

12. 设 $|A \cup B| = k$. 元数为 k 的子集有 C_n^k 个. 对任一 k 元子集 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\} \subseteq X$, $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$，集 B 可为$\varnothing$, $\{a_1\}$, $\{a_1, a_2\}$, $\cdots$, $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$，共有 $k+1$ 种，因此好子集对的个数为

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)C_n^k = 2^n + n \cdot 2^{n-1}.$$

13. 答案可加强为$\left\lceil \frac{n}{k-1} \right\rceil$. 对 n 归纳. 考虑各区间中右端点最大的 k 个区间，其中必有两个区间$[a, b]$, $[c, d]$互不相交，即 $b < c$.

再考虑剩下的 $n-k$ 个区间及$[a, b]$. 由归纳假设，其中有$\left\lceil \frac{n-k+1}{k-1} \right\rceil$个两两不相交的区间. 这些区间的右端点均 $\leqslant b$，因而不与$[c, d]$相交. 连同$[c, d]$共有$\left\lceil \frac{n-k+1}{k-1} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{n}{k-1} \right\rceil$个两两不相交的区间.

14. 将人依圆桌的(顺时针)次序编号为 1, 2, $\cdots$, 25. 不妨设一个团体由 9, 10, $\cdots$, $8+k$ $(k \leqslant 9)$ 组成. 这时含 1 的团体必为$\{1, 2, \cdots, 9\}$，含 25 的团体必为$\{25, 24, \cdots, 17\}$(否则与(i), (ii)矛盾). 由于$\{1, 2, \cdots, 9\}$与$\{25, 24, \cdots, 17\}$无公共成员，所以这两个团体至多出现一个. 即 1 或 25 中至少有一个不属于任何一个团体.

不妨设 25 不属于任何一个团体. 各团体的最大号数的最小值记为 m，则 m 必属于所有团体. 事实上，m 是某团体 C_1 的最大号数，对任一团体 C_i, C_i 的最大号数 $m_i \geqslant m$. 由于 $C_i \cap C_1 \neq \varnothing$, C_i 的最小号数必不大于 m，从而 $m \in C_i$.

注：如果从 25 那里将圆周剪断，拉成直线，问题便化成直线上若干闭区间，每两个有公共点，则这些闭区间有公共点.

15. 设 $A_1=\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$. 若 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_t=\varnothing$，则对每个 $i\ (1\leqslant i\leqslant r)$，均有一个 $\mathscr{A}$ 中的子集不含 x_i. 这些集（不超过 r 个）与 A_1 的交为空集，矛盾.

16. 设 $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$. 由 1.10 节例 1，$A_1\triangle A_i(1\leqslant i\leqslant t)$ 互不相同.

17. 先证 $r\geqslant\sqrt{2n}-1$. 不妨设 A_1 是 $\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$ 中的最小元（即 A_1 不包含其他的集 A_i，$i\neq 1$）. 设已有 $A_{i_1}=A_1, A_{i_2}, \cdots, A_{i_s}$，组成无并的族. 因为 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_s}$ 两两的并集至多 C_s^2 个，所以在 $n-s>C_s^2$ 时，总可以在剩下的 $n-s$ 个集中再取出一个不等于 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_s}$ 中任两个的并. 这样继续下去，直至选出无并族 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_r}$，$r$ 满足 $n-r\leqslant C_r^2$，从而 $r\geqslant\sqrt{2n}-1$.

再证 $\min r<2\sqrt{n}+1$. 设 t 为满足 $\left[\frac{t^2}{4}\right]\geqslant n$ 的最小整数. 考虑 $\left[\frac{t^2}{4}\right]=\left[\frac{t}{2}\right]\left[\frac{t+1}{2}\right]$ 个自然数的集合.

$$A_{i,j}=\{x\mid i\leqslant x\leqslant j\},\ 1\leqslant i\leqslant\frac{t}{2}<j\leqslant t.$$

设 $\{A_{i_k,j_k}, 1\leqslant k\leqslant r\}$ 为无并的子族，则对每个 k，以下两种情况不能同时发生：(1)存在 A_{i_s,j_s} 满足 $i_s=i_k$，$j_s<j_k$；(2)存在 A_{i_t,j_t}，满足 $i_t>i_k$，$j_t=j_k$. 否则 $A_{i_s,j_s}\cup A_{i_t,j_t}=A_{i_k,j_k}$. 当(1)不发生时，将 i_k 染红；当(2)不发生时，将 j_k 染红. 这样，对每个 k，$\{1, 2, \cdots, t\}$ 中有一个对应的红点. 与不同的 k 对应的红点不同（若与 k，k' 对应的红点均为 i_k，则(1)发生，与红点定义矛盾. 若与 k，k' 对应的红点均为 j_k，则(2)发生，矛盾）. 于是 $r\leqslant t$. 从而 $r<2\sqrt{n}+1$.

18. 对每 $k-1$ 个的并，X 至少有一个元不在这并集中，不同的并对应的元不同. 因此 $|X|\geqslant C_n^{k-1}$.

若 $|X|=C_n^{k-1}$，则 X 的每个元恰与一族 $k-1$ 个集对应，这个元不在这 $k-1$ 个集中，在其他 $n-(k-1)$ 个集中. 因此，

$$nr = \sum |A_i| = (n-k+1)|X| = (n-k+1)C_n^{k-1},$$

$$r = \frac{n-k+1}{n}C_n^{k-1} = C_{n-1}^{k-1}.$$

19. 设 n 为满足 $C_n^r \geqslant t$ 的最小整数. 一方面, $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 都是 X 的 r 元子集, 所以 $t \leqslant C_{|X|}^r$. 从而 $|X| \geqslant n$.

另一方面, 任一 n 元集 X, 有 $C_n^r \geqslant t$ 个 r 元子集, 从中任取 t 个. 设它们的并集为 Y, 则由上面所说, $|Y| \geqslant n$, 因而 $Y = X$. X 就是所取 t 个 r 元集的并集.

因此, 所求最小值即 n.

20. 在 4.1 节例 3 中, 令 $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = p$, $b_1 = b_2 = \cdots = b_m = q$ 即得.

21. 设 $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$, 其中 A_1 最小, 即 A_1 不包含 A_2, $A_3, \cdots, A_t$ 中任何一个. 由于 $A_1 \cap A_2, A_1 \cap A_3, \cdots, A_1 \cap A_t$ 均在 $\mathscr{A}$ 中, 所以 $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = \cdots = A_1 \cap A_t = A_1$, $\mathscr{A} = \{A_1, A_1 \cup B_2, \cdots, A_1 \cup B_t\}$, 其中 $B_2, B_3, \cdots, B_t$ 是互不相同的非空集合, 且均是 $X - A_1$ 的子集.

设 $|X - A_1| = k$, 则 $0 \leqslant k \leqslant n-1$. $\{B_2, B_3, \cdots, B_t\}$ 是 $X - A_1$ 的非空子集的族, $X - A_1$ 有 $2^k - 1$ 个非空子集, 每一个均可属于, 也可不属于 $\{B_2, B_3, \cdots, B_t\}$, 因而 $\{B_2, B_3, \cdots, B_t\}$ 有 2^{2^k-1} 个. 而 A_1 有 C_n^{n-k} 种. 所以滤子族的个数为 $\sum_{k=0}^{n-1} C_n^k 2^{2^k-1}$.

22. 设 $|X| = n$. 至少有一个 A_i 同色的种数 $< t \times 2 \times 2^{n-r} \leqslant 2^{r-1} \times 2 \times 2^{n-r} = 2^n$. 其中 2 表示 A_i 的元素可全染红或全染黑, 2^{n-r} 是 $X - A_i$ 的元素的染色的种数. 由于在 X 的元素全同色时, $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 均同色, 所以上面的第一个不等号是严格的. X 的染色方法有 2^n 种, 因此必有一种使得每个 A_i 均不同色.

23. 任意地将 X 的元素染成红或黑色, 若 A_1 中的元素全红, 将 A_1 中一个元素 x 改为黑色. 由于 $|A_1| \geqslant 2$, 所以 A_1 不同色. 设已有 A_1, $A_2, \cdots, A_i$, 每个集的元素不全同色. 若 A_{i+1} 的元素同色, 不妨设全为

红色，将 A_{i+1} 中一个元素 y 改为黑色，这时 A_{i+1} 中的元素不全同色. 若有 A_j $(1 \leqslant j \leqslant i)$ 变为同色，则 A_j 中元素均与 y 同为黑色，$|A_j \cap A_{i+1}| = |\{y\}| = 1$，矛盾. 因此 $A_1, A_2, \cdots, A_{i+1}$ 每个集的元素不全同色. 继续这样调整，可使 $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 各个集的元素不全同色.

24. 对任一个 $x \in X$，用 $d(x)$表示 $\mathscr{A}$ 中含 x 的子集个数. 若有某个 $d(x) = t$，则 $A_1 - \{x\}, A_2 - \{x\}, \cdots, A_t - \{x\}$（其中可能有一个空集）两两不相交，因此 $t \leqslant n$.

设恒有 $d(x) < t$. 对 x，$\mathscr{A}$ 中存在 $A_1, A_2, \cdots, A_{d(x)}$ 及 A，满足 $x \in A_1, A_2, \cdots, A_{d(x)}$ 及 $x \notin A$. 由已知 $|A_i \cap A_j| = 1$，$A \cap A_1$，$A \cap A_2, \cdots, A \cap A_{d(x)}$ 均是单元素集，并且各不相同，所以 $|A| \geqslant d(x)$.

若 $t > n$，则 $\dfrac{d(x)}{t - d(x)} < \dfrac{d(x)}{n - d(x)} \leqslant \dfrac{|A|}{n - |A|}$. 求和得

$$\sum_{x \in X} \sum_{\substack{x \notin A \\ A \in \mathscr{A}}} \frac{d(x)}{t - d(x)} = \sum_{x \in X} d(x) < \sum_{A \in \mathscr{A}} \sum_{x \notin A} \frac{|A|}{n - |A|} = \sum_{A \in \mathscr{A}} |A|.$$

另一方面，考虑一个两部分图. 一部分有 n 个点，代表 X 的 n 个元素. 另一部分有 t 个点，代表 $\mathscr{A}$ 中的 t 个子集. 若 $x \in A$，就在代表 x 与代表 A 的点之间连一条线. $\sum d(x)$ 与 $\sum |A|$ 都是这个图的线的条数，所以 $\sum d(x) = \sum |A|$. 与上面的不等式矛盾. 这表明 $t \leqslant n$.

25. 令 $k = \min(|A_i|, |B_i|, 1 \leqslant i \leqslant n)$. 不妨设 $|A_1| = k$. 因为 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 两两不相交，所以至多有 k 个 B_i 满足 $A_1 \cap B_i \neq \varnothing$. 设这些 B_i 为 $B_1, B_2, \cdots, B_m$，$m \leqslant k$，则对于 $i > m$，$|B_i| \geqslant n - |A_1| = n - k$. 当 $k < \dfrac{n}{2}$ 时，

$$\begin{aligned} |X| &= \sum_{i=1}^{m} |B_i| + \sum_{i=m+1}^{n} |B_i| \geqslant mk + (n-m)(n-k) \\ &= n(n-k) - m(n-2k) > n(n-k) - k(n-2k) \\ &= \frac{n^2}{2} + \left(\frac{n}{\sqrt{2}} - \sqrt{2}k\right)^2 \geqslant \frac{n^2}{2}. \end{aligned}$$

当 $k \geqslant \frac{n}{2}$ 时，$|X| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| \geqslant nk \geqslant \frac{n^2}{2}$.

若 n 为偶数，将 $\frac{n^2}{2}$ 元集 X 分拆为 n 个 $\frac{n}{2}$ 元集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$. 又令 $B_i = A_i$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$，则题中条件均满足.

26. 对每个 $A \in \mathscr{A}$，必有 X 的子集 A_1，A_1 与 A 可以比较，与 $\mathscr{A}$ 中其他子集均不可比较(否则 A 可取消，与 $\mathscr{A}$ 的最小性矛盾). 令 A, A_1 中较大的为 A^*，$\mathscr{A}^* = \{A^* \mid A \in \mathscr{A}\}$. 显然不同的 A, A^* 不同，所以 $|\mathscr{A}^*| = |\mathscr{A}|$.

$\mathscr{A}^*$ 是 S 族. 事实上，若 $\mathscr{A}^*$ 中有 $C^* \subseteq D^*$，则有四种情况：(1) $C^* = C$, $D^* = D_1$. 这时 D_1 与 C 可比较. (2) $C^* = C$, $D^* = D$. 这时 $C_1 \subseteq C \subseteq D$. (3) $C^* = C_1$, $D^* = D$. 这时 $C_1 \subseteq D$. (4) $C^* = C_1$, $D^* = D_1$，这时 $C \subseteq C_1 \subseteq D_1$. 均导致矛盾.

因此 $|\mathscr{A}| = |\mathscr{A}^*| \leqslant C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

27. "B_i 不是 B_j 的子集"意味着存在 $k \in B_i - B_j$，即 $i \in A_k$，$j \notin A_k$. "B_j 不是 B_i 的子集"意味存在 h 使得 $i \notin A_h$，$j \in A_h$. 从而 $\mathscr{A}^*$ 为 S 族导出 $\mathscr{A}$ 完全可分. 反之亦然.

28. $\mathscr{A}$ 中每一子集与 $b(\mathscr{A})$ 中每一子集均相交，因此 $\mathscr{A}$ 中每一子集必含一个 $b(b(\mathscr{A}))$ 中的子集. 反之，设 A 为 $b(b(\mathscr{A}))$ 中一个子集，则 A 与 $b(\mathscr{A})$ 中每一子集均相交，A' 必不包含 $b(\mathscr{A})$ 中任一子集，即 A' 不可能与 $\mathscr{A}$ 中每一子集均相交. 于是 $\mathscr{A}$ 中有 A_1，$A_1 \cap A' = \varnothing$，即 $A_1 \subseteq A$. 从而 $b(b(\mathscr{A}))$ 中每一子集必含一个 $\mathscr{A}$ 中的子集.

于是，设 $A \in \mathscr{A}$，则有 $B \in b(b(\mathscr{A}))$ 满足 $A \supseteq B$，又有 $C \in \mathscr{A}$ 满足 $B \supseteq C$. 但 $\mathscr{A}$ 为 S 族，所以 $A = B = C$. 因此 $\mathscr{A} \subseteq b(b(\mathscr{A}))$. 反之，对 $B \in b(b(\mathscr{A}))$，存在 $C \in \mathscr{A}$ 满足 $B \supseteq C$. 由于 $C \in b(b(\mathscr{A}))$，它是与所有 $b(\mathscr{A})$ 中子集均相交的最小集，所以 $B = C$. 即 $b(b(\mathscr{A})) \subseteq \mathscr{A}$. 从而 $\mathscr{A} = b(b(\mathscr{A}))$.

29. 考虑由 $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 组成的链. 如果有一条链含有至少 $[t^{\frac{1}{2}}]$ 个 A_i $(1 \leqslant i \leqslant t)$，这 $[t^{\frac{1}{2}}]$ 个子集满足要求. 否则，对每个 i $(1 \leqslant i$

$\leqslant t$)．称以 A_i 为最小元的链的最大长度为 A_i 的层数，则层数 $\leqslant [t^{\frac{1}{2}}]$．因此，必有 $[t^{\frac{1}{2}}]$ 个 A_i 的层数相同．它们构成 S 族，满足要求．

30. 设 $\mathscr{H}=\{A \mid A\subseteq X$，$A$ 包含 $\mathscr{A}$ 中一子集也包含 $\mathscr{B}$ 中一子集$\}$，

$\mathscr{P}=\{A \mid A\subseteq X$，$A$ 包含 $\mathscr{A}$ 中一子集，但不包含 $\mathscr{B}$ 中任一子集$\}$，

$\mathscr{Q}=\{A \mid A\subseteq X$，$A$ 包含 $\mathscr{B}$ 中一子集，但不包含 $\mathscr{A}$ 中任一子集$\}$，

$\mathscr{K}=\{A \mid A\subseteq X$，$A$ 不包含 $\mathscr{A}$ 中任一子集，也不包含 $\mathscr{B}$ 中任一子集$\}$．

$\mathscr{U}=\mathscr{H}\cup\mathscr{P}$，$\mathscr{D}=\mathscr{P}\cup\mathscr{K}$，则 $\mathscr{U}$ 为上族，$\mathscr{D}$ 为下族．由 4.9 节(4)，$(|\mathscr{H}|+|\mathscr{P}|)(|\mathscr{P}|+|\mathscr{K}|)\geqslant 2^n|\mathscr{P}|$．又 $|\mathscr{H}|+|\mathscr{P}|+|\mathscr{Q}|+|\mathscr{K}|=2^n$，代入上式消去 2^n，然后再化简得 $|\mathscr{P}|\cdot|\mathscr{Q}|\leqslant|\mathscr{H}|\cdot|\mathscr{K}|\leqslant\left(\frac{|\mathscr{H}|+|\mathscr{K}|}{2}\right)^2$ $=\left(\frac{2^n-|\mathscr{P}|-|\mathscr{Q}|}{2}\right)^2$，从而 $(\sqrt{|\mathscr{P}|}+\sqrt{|\mathscr{Q}|})^2\leqslant 2^n$．显然有 $\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}$，$\mathscr{B}\subseteq\mathscr{Q}$．因此 $\sqrt{|\mathscr{A}|}+\sqrt{|\mathscr{B}|}\leqslant\sqrt{|\mathscr{P}|}+\sqrt{|\mathscr{Q}|}\leqslant 2^{\frac{n}{2}}$．

31. 因为 $\sum\limits_{i\in I_j} w_{f(i)}=1$，所以，

$$B_1\cap X_j=B_2\cap X_j=\cdots=B_t\cap X_j,\ j=1,2,\cdots,n.$$

对 j 求和得

$$B_1=B_1\cap(\bigcup_j X_j)=B_1\cap X=B_2=\cdots=B_t=B.$$

又对每个 j，凡成为 X_j 子集的 A_i，元数 a_i 均相等，并且它们是 X_j-B 的全部 a_i 元子集．若一切 a_i 均等于 a，则由 $\sum\limits_{i=1}^{t} w(i)=1$ 得 $t=C_{n-b}^{a}$，结论成立．若有 $a_i\neq a_k$，不妨设 $A_k\subseteq X_1$，$A_i\subseteq X_j$，并且 $a_k<n-1$．这时 $j\in A_k$（因为 $A_k\not\subseteq X_j$），又有 $h\neq 1$，$h\notin A_k$（因为 $a_k<n-1$）．所以 $A_k\cup\{h\}-\{j\}\subseteq X_1$ 且元数与 A_k 相同，因而必为某个 A_q，并且 $\subseteq X_j$，所以 $|A_k|=|A_i|$，与 $a_i\neq a_k$ 矛盾．因此一切 a_i 均等于 a．

32. $g=\{[1,2]$ 中的无理点$\}\cup\{3\}\cup(4,5)$．

$$gf=(4,5),\quad fg=[1,2]\cup\{3\}\cup[4,5],$$

$$fgf=[4,5],\quad gfgfg=[1,2)\cup(4,5],$$

$gfgfgf=(4,5]$， $fgfgfg=[1,2]\cup[4,5]$.

33. $f(x)=\begin{cases}x, & 若 x\neq\frac{1}{2^n}, n=1,2,\cdots;\\ 2x, & 若 x=\frac{1}{2^n}, n=1,2,\cdots\end{cases}$ 建立 $[0,1)$ 与 $[0,1]$ 之间的一一对应. $f(1-x)$ 建立 $(0,1]$ 与 $[0,1]$ 之间的一一对应. $\varphi_{(x)}=\begin{cases}\frac{1-f(1-2x)}{2}, & 若 x\in\left(0,\frac{1}{2}\right];\\ \frac{1+f(2x-1)}{2}, & 若 x\in\left[\frac{1}{2},1\right)\end{cases}$ 建立 $(0,1)$ 与 $[0,1]$ 之间的一一对应. 将 $y=(b-a)x+a$ 与上述函数复合便得到所需的对应. 当然这样的对应决非唯一.

34. $\overline{A}$ 的元素属于无穷多个 A_n. $\underline{A}$ 的元素属于 A_n ($n\geqslant$ 某个与该元素有关的 m)，因而属于无穷多个 A_n，即属于 $\overline{A}$. 所以 $\underline{A}\subseteq\overline{A}$.

令 $A_1=A_3=A_5=\cdots=A$, $A_2=A_4=A_6=\cdots=B$. 则 $\overline{A}=A\cup B$. $\underline{A}=A\cap B$.

35. 集族 $\left\{A\cup B\mid A\subseteq Y, |A|=r, B\subseteq X-Y, |B|=\left[\frac{n-k}{2}\right]\right\}$ 的元数为 $C_k^r C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}$.

另一方面，设 $\mathscr{A}$ 为满足要求的最大集族. 对 Y 的任一 r 元子集 A，$\mathscr{A}$ 中所有含 A 的子集互不包含，它们减去 A 后组成 $X-Y$ 的 S 族，因而个数 $\leqslant C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}$.

36. 显然 $a=f(f(f(a)))=f(a)$. 设除去 a 外，还有 k 个元的像为 a，这 k 个元有 C_{n-1}^k 种选择. X 中其他的 $n-k-1$ 个元，每个元的像可为这 k 个元中任何一个. 于是 f 共有 $\sum\limits_{k=1}^{n-1}C_{n-1}^k\cdot k^{n-k-1}$ 个.

37. 每一个 n 维向量恰盖住 $C_n^1\times(p-1)+1$ 个向量，因此 $|Y|\geqslant\frac{p^n}{n(p-1)+1}$.

当 $n=2$ 时，$\{(1,1),(2,2),\cdots,(p,p)\}$ 可覆盖 X. 另一方面，

对任 $p-1$ 个向量的集 $\{(a_i, b_i), i=1, 2, \cdots, p-1\}$，存在 $a \neq a_i(1 \leqslant i \leqslant p-1)$，$b \neq b_i(1 \leqslant i \leqslant p-1)$. (a, b)不被这 $p-1$ 个向量覆盖. 因此 $\min |Y| = p$.

38. 设 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$A_1, A_2, \cdots, A_{100}$ 中含 x_k 的有 n_k 个 $(k=1, 2, \cdots, n)$，则

$$\sum n_k = \sum |A_i| > \frac{3}{4}n \times 100 = 75n.$$

于是必有 k 使 $n_k \geqslant 76$. 不妨设 $n_1 \geqslant 76$.

设 $A_1, A_2, \cdots, A_{100}$ 中不含 x_1 的为 $B_1, B_2, \cdots, B_s$，$s \leqslant 100-76 = 24$. $\sum |B_i| > \frac{3}{4}ns$，因而必有 x_k 属于 $> \frac{3}{4}s$ 个 B_i，不妨设 x_2 属于 $> \frac{3}{4}s$ 个 B_i. $B_1, B_2, \cdots, B_s$ 中不含 x_2 的为 $C_1, C_2, \cdots, C_t$，则 $t < \frac{1}{4}s \leqslant 6$.

最后，$C_1, C_2, \cdots, C_t$ 中不含某个 x_3 的 $< \frac{1}{4}t \leqslant \frac{5}{4}$ 个，即至多一个，设这个为 D.

取 $Y = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$，$x_4 \in D$.

39. 不妨设 $\varnothing \notin \mathscr{A}$. 显然 $\mathscr{A} \neq \{X\}$. 设 $A \in \mathscr{A}$ 并且 $|A| = a \geqslant 1$ 为最小. 因为 $a \leqslant n-1$，$X-A$ 是 X 的真子集，$X-A$ 与 $\mathscr{A}$ 中除 A 外的所有子集的交均非空，因此 $|\mathscr{A}|-1$ 是偶数，$\mathscr{A}$ 含有 X 中奇数个子集.

对任一 $x \in X$，若 $\{x\} \notin \mathscr{A}$，则 $X-\{x\}$ 与 $\mathscr{A}$ 中所有子集(奇数个)均相交，与已知矛盾. 因此 $\{x\} \in \mathscr{A}$.

设每个元数 $< k\ (<n)$ 的子集 $\in \mathscr{A}$. 对元数为 k 的子集 A，若 $A \notin \mathscr{A}$，则 $X-A$ 与 $\mathscr{A}$ 中除去 $2^{|A|}-2$ 个(A 的真子集共 $2^{|A|}-2$ 个)外的子集相交，与已知矛盾. 于是 X 的真子集均在 $\mathscr{A}$ 中.

若 $X \notin \mathscr{A}$，则 $|\mathscr{A}| = 2^n-2$ 为偶数，与上面所证矛盾. 所以 $X \in \mathscr{A}$. $\mathscr{A} = P(X)$ 或 $P(X)-\{\varnothing\}$.

40. 设 $x_1, x_2 \in X$. 由(2)可设 $x_1 \wedge x_2$. 由(3)有 $x_3 \in X$，使 $x_1 \wedge x_3 \wedge x_2$(即 $x_1 \wedge x_3$，$x_3 \wedge x_2$).

类似地，有 $x_4, x_5, x_6, x_7 \in X$，满足：

$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$，$x_4 \wedge x_5 \wedge x_3$，$x_3 \wedge x_6 \wedge x_2$，$x_3 \wedge x_7 \wedge x_6$.

由(1)，$x_3 \neq x_1, x_2$，而 $x_4 \neq x_1, x_3$. 由(2)，$x_4 \neq x_2$.

类似地，$x_5 \neq x_1, x_2, x_3, x_4$；$x_6 \neq x_1, x_2, x_3, x_4, x_5$；$x_7 \neq x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6$.

从而 X 至少有 7 个元素.

另一方面，对任一元数 $\geqslant 7$ 的有限集 X，均可建立一个二元关系 $\wedge$，满足(1)，(2)，(3).

情况 1：$X = \{1, 2, \cdots, n\}$，n 为奇数 ($\geqslant 7$).

对于 $1 \leqslant s < t \leqslant n$，定义：

$s \wedge t$，若 $t - s = 1$ 或小于 $n - 1$ 的正偶数，

$t \wedge s$，若 $t - s = n - 1$ 或大于 1 的奇数.

显然(1)，(2)成立. 设有 $x \wedge y$. 1° $y - x = 1$，这时又分两种情况：$x \leqslant n - 4$ 时，$x \wedge (x+4) \wedge y$. $x > n - 4$ 时，$x \wedge (x - n + 4) \wedge y$. 2° $y - x$ 为小于 $n - 1$ 的正偶数. 当 $y - x > 2$ 时，$x \wedge (x+2) \wedge y$. 当 $y - x = 2$ 时，$x \wedge (x+1) \wedge y$. 3° $x - y = n - 1$ 或大于 1 的奇数. 当 $y \geqslant 3$ 时，$x - y$ 是大于 1 的奇数，$x \wedge (y-2) \wedge y$. 当 $x \leqslant n - 2$ 时，$x \wedge (x+2) \wedge y$. 当 $y = 1$ 而 $x = n - 1$ 时，$x \wedge n \wedge y$. 当 $y = 1$ 而 $x = n$ 时，$x \wedge (n-3) \wedge y$. 当 $y = 2$ 而 $x = n$ 时，$x \wedge 1 \wedge y$.

于是(3)成立.

情况 2：$X = \{1, 2, \cdots, n+1\}$，$n$ 为奇数 ($\geqslant 7$).

在 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 上定义 $\wedge$ 与情况 1 相同. 此外 $x \wedge (n+1)$，$x = 1, 2, \cdots, n$.

显然(1)，(2)成立. 设 $x \wedge y$. 若 $x, y \leqslant n$，与情况(1)同样，(3)成立. 若 $y = n+1$，而 $x \leqslant n - 1$，则 $x \wedge (x+1) \wedge y$. 若 $y = n+1$ 而 $x = n$，则 $x \wedge 1 \wedge y$. 因此(3)成立.

综上所述，X 的最小元数为 7.

封面页
书名页
版权页
前言页
目录页
第一章　集合
1．1集合
1．2从属关系
1．3包含
1．4并与交
1．5差与补
1．6　Ｖｅｎｎ图
1．7有关集合的等式（Ⅰ）
1．8对称差
1．9有关集合的等式（Ⅱ）
1．1０有关集合的等式（Ⅲ）
1．1１容斥原理（Ⅰ）
1．1２容斥原理（Ⅱ）
第二章　映射
2．1映射
2．2复合映射
2．3有限集到自身的映射
2．4构造映射（Ⅰ）
2．5构造映射（Ⅱ）
2．6函数方程（Ⅰ）
2．7函数方程（Ⅱ）
2．8链
2．9图
第三章　有限集的子集
3．1子集的个数
3．2两两相交的子集
3．3奇偶子集
3．4另一种奇偶子集
3．5　Ｇｒａｈａｍ的一个问题
3．6三元子集族（Ⅰ）
3．7三元子集族（Ⅱ）
3．8　Ｓｔｅｉｎｅｒ三连系
3．9构造
3．1０分拆（Ⅰ）
3．1１分拆（Ⅱ）
3．1２覆盖
3．1３　Ｓｔｉｒｌｉｎｇ数
3．1４　Ｍ（ｎ９　ｋ９　ｈ）

第四章　各种子集族
４．１　Ｓ族
４．２链
４．３　Ｄｉｌｗｏｒｔｈ定理
４．４　Ｌｉｔｔｌｅｗｏｏｄ－Ｏｆｆｏｒｄ问题
４．５　Ｉ族
４．６　ＥＫＲ定理的推广
４．７影
４．８　Ｍｉｌｎｅｒ定理
４．９上族与下族
４．１０四函数定理
４．１１　Ｈ族
４．１２相距合理的族
第五章　无限集
５．１无限集
５．２可数集
５．３连续统的基数
５．４基数的比较
５．５直线上的开集与闭集
５．６　Ｃａｎｔｏｒ的完备集
５．７　Ｋｕｒａｔｏｗｓｋｉ定理
习题
习题解答
附录页